

**Písemná zkouška z Matematiky I pro IES FSV UK (C)**  
**ZS 2019-2020**

---

**Příklad 1 :** Spočtěte limitu posloupnosti:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{99} - \left(1 + \frac{3}{n}\right)^{33}}{\left(2 + \frac{1}{n}\right)^{99} - \left(8 + \frac{12}{n}\right)^{33}} \quad (12 \text{ bodů})$$

**Příklad 2 :** Spočtěte limitu:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{4x} + (4x)^x - 2}{(2x)^x - 1} \quad (12 \text{ bodů})$$

**Příklad 3 :** Vyšetřete spojitost (včetně jednostranné spojitosti) a spočtěte derivaci funkce

$$f(x) = (x^3 - 2x^2 + x) \cdot \left[ \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} x \right] \quad [\dots] \text{ znamená celou část}$$

ve všech bodech, v nichž existuje (včetně jednostranných derivací, neexistuje-li oboustranná).

(9 bodů)

**Příklad 4 :** Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{2}{x} + \log(x^2 + 4) - \frac{x}{4}. \quad (17 \text{ bodů})$$

---

**Výsledky písemky z Matematiky I pro IES FSV UK (C)**  
**ZS 2019-2020**

---

**Příklad 1:**  $\frac{1}{2^{97}}$

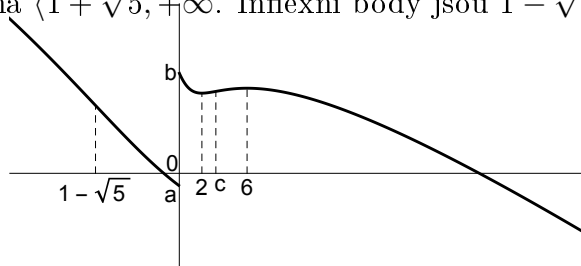
**Příklad 2:** 5

**Příklad 3:**  $D_f = \mathbb{R}$ .  $f$  je spojitá v každém bodě  $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$  (spojitost v bodech  $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$  je zřejmá, spojitost v bodech 0 a 1 je třeba dokázat zvlášť); v bodě  $-1$  je  $f$  spojitá zprava a nespojitá

$$\text{zleva. } f'(x) = \begin{cases} -6x^2 + 8x - 2 & x \in (-\infty, -1), \\ -3x^2 + 4x - 1 & x \in (-1, 0), & f'_-(-1) = -\infty, f'_+(-1) = -8, \\ 0 & x \in (0, 1), & f'_-(0) = -1, f'_+(0) = f'(1) = 0. \\ 3x^2 - 4x + 1 & x \in (1, \infty). \end{cases}$$

**Příklad 4:**  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,  $f$  je spojitá v každém bodě  $D_f$ .  $f$  není sudá, lichá ani periodická (periodická není kvůli tvaru  $D_f$ ; sudě ani liše na první pohled nevypadá, že skutečně není ani sudá ani lichá, plyne z vlastností zjištěných níže). Limita v  $-\infty$  je  $+\infty$ , limita v 0 zleva je  $-\frac{\pi}{2} + 2 \log 2$ , limita v 0 zprava je  $\frac{\pi}{2} + 2 \log 2$ , limita v  $+\infty$  je  $-\infty$ .  $f$  je klesající na  $(-\infty, 0)$ , klesající na  $(0, 2)$ , rostoucí na  $\langle 2, 6 \rangle$  a klesající na  $\langle 6, +\infty \rangle$ . V bodě 2 má lokální maximum a v bodě 6 má lokální infimum.  $H_f = \mathbb{R}$ .  $f$  je konkávní na  $(-\infty, 1 - \sqrt{5})$ , konvexní na  $\langle 1 - \sqrt{5}, 0 \rangle$ , konvexní na  $(0, 1 + \sqrt{5})$  a konkávní na  $\langle 1 + \sqrt{5}, +\infty \rangle$ . Inflexní body jsou  $1 - \sqrt{5}$  a  $1 + \sqrt{5}$ .  $f$  nemá asymptoty.

Graf:



$$a = -\frac{\pi}{2} + 2 \log 2$$

$$b = \frac{\pi}{2} + 2 \log 2$$

$$c = 1 + \sqrt{5}$$