

# Počtení písemná část zkoušky z Matematiky III pro IES FSV UK (A)

Zimní semestr 2020/2021

**Příklad 1:** Spočtěte primitivní funkci

$$\int \frac{\left(\sqrt{\frac{x+1}{x+2}} + 1\right) \left(\sqrt{\frac{x+1}{x+2}} - 1\right)^2}{\sqrt{\frac{x+1}{x+2}} + 2\sqrt[4]{\frac{x+1}{x+2}} + 2} dx$$

na maximálních intervalech, kde existuje. (11 bodů)

**Příklad 2:** Určete povahu (definitnost) kvadratické formy  $Q$  reprezentované maticí

$$\begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & -8 & -4 & -3 \\ 2 & -4 & -3 & -2 \\ 1 & -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

a spočtěte hodnotu  $Q \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ . (9 bodů)

**Příklad 3:** Najděte všechna vlastní čísla a jim příslušné vlastní vektory pro matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 3 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}. \quad (10 \text{ bodů})$$

**Příklad 4:** Spočtěte limitu (například pomocí Taylorova polynomu):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{1-\cos 3x} - e^{1-\cos 4x} - 7x + 7}{(1 - \cos x)^2}. \quad (11 \text{ bodů})$$

**Příklad 5:** Najděte všechny lokální extrémů funkce

$$f(x, y) = \arctg(3x - y^3) - \frac{1}{3} \arctg(x - y)$$

na množině  $\mathbf{R}^2$ . (9 bodů)

## Výsledky

**Příklad 1:** Primitivní funkce (až na konstantu) je  $-\frac{2}{5} \log \left( \sqrt{\frac{x+1}{x+2}} + 1 \right) - \frac{8}{5} \operatorname{arctg} \sqrt[4]{\frac{x+1}{x+2}} + \frac{12}{5} \log \left( \sqrt{\frac{x+1}{x+2}} + 2\sqrt[4]{\frac{x+1}{x+2}} + 2 \right) - \frac{8}{5} \operatorname{arctg} \left( \sqrt[4]{\frac{x+1}{x+2}} + 1 \right)$  na intervalu  $(-\infty, -2)$  a na intervalu  $(-1, +\infty)$ . (Lze použít substituci  $y = \sqrt[4]{\frac{x+1}{x+2}}$  pro převod na integrál z racionální funkce.)

**Příklad 2:** Kvadratická forma je indefinitní, hodnota v uvedeném bodě je  $-2$ .

**Příklad 3:** Vlastní čísla jsou  $1, 2 + i, 2 - i$ , všechna násobnosti 1. Vlastní vektory příslušné vlastnímu číslu 1 jsou  $c \cdot [1, 4, 1]$ ,  $c \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ . Vlastní vektory příslušné vlastnímu číslu  $2 + i$  jsou  $c \cdot [1 + 2i, 3 + 3i, 1]$ ,  $c \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ . Vlastní vektory příslušné vlastnímu číslu  $2 - i$  jsou  $c \cdot [1 - 2i, 3 - 3i, 1]$ ,  $c \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ .

**Příklad 4:**  $+\infty$ . (Není třeba použít Taylorův polynom, čítec má limitu 7, jmenovatel má limitu 0 a je kladný na prstencovém okolí bodu 0.)

**Příklad 5:** Ostré lokální maximum v bodě  $[\frac{5}{4}, 1]$  a ostré lokální minimum v bodě  $[-\frac{5}{4}, -1]$ .