Početní písemná část zkoušky z Matematiky III pro IES FSV UK (B)

Zimní semestr 2020/2021

Příklad 1: Spočtěte (Riemannův) integrál

$$\int_0^{7\pi} \frac{1+\sin x+\cos x}{3+2\sin x+\cos x}\,dx. \qquad \text{(11 bodů)}$$

Příklad 2: Určete povahu (definitnost) kvadratické formy Q reprezentované maticí

$$\begin{pmatrix} 7 & -3 & 6 & -3 \\ -3 & 3 & -3 & 3 \\ 6 & -3 & 7 & -4 \\ -3 & 3 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

a spočtěte hodnotu $Q\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$. (9 bodů)

Příklad 3: Najděte všechna vlastní čísla a jim příslušné vlastní vektory pro matici

$$\begin{pmatrix} 8 & 6 & 8 \\ -9 & -7 & -10 \\ 6 & 3 & 0 \end{pmatrix}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad 4: Spočtěte limitu (například pomocí Taylorova polynomu):

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(e^{2x}-1) - 4\cos(e^x-1) + 2e^{x^3} + 1}{\sin^4 x}. \qquad \text{(11 bodů)}$$

Příklad 5: Najděte všechny lokální extrémy funkce

$$f(x,y) = \operatorname{arctg}(x-y^2) + \frac{5}{8}\log(y-x)$$

na množině $M = \{[x,y] \in \mathbf{R}^2 \colon y > x\}$. (9 bodů)

Výsledky

Příklad 1: $\frac{8}{5}\pi - \frac{1}{5}\log 2$. (Integrál se rovná $3\int_{-\pi}^{\pi} + \int_0^{\pi}$, pak lze pomocí substituce $y = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ převést na integrál z racionální funkce. Alternativně lze vyjádřit jako $3\int_0^{2\pi} + \int_0^{\pi}$ a použít substituci $y = \operatorname{cotg}\frac{x}{2}$.)

Příklad 2: Kvadratická forma je pozitivně definitní, hodnota v uvedeném bodě je 11.

Příklad 3: Vlastní čísla jsou $-4, 0, 5$, všechna násobnosti 1. Vlastní vektory příslušné vlastnímu číslu -4 jsou $c \cdot [-2, \frac{8}{3}, 1]$, $c \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$. Vlastní vektory příslušné vlastnímu číslu 0 jsou $c \cdot [2, -4, 1]$, $c \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$. Vlastní vektory příslušné vlastnímu číslu 5 jsou $c \cdot [2, -\frac{7}{3}, 1]$, $c \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$.

Příklad 4: -3. (Je třeba použít Taylorův polynom řádu 4 čitatele v bodě 0.)

Příklad 5: Ostré lokální maximum v bodě $[-\frac{7}{20}, \frac{1}{2}]$. (Sedlový bod $[-\frac{3}{4}, \frac{1}{2}]$.)