

Počtení písemná část zkoušky z Matematiky III pro IES FSV UK (C)

Zimní semestr 2020/2021

Příklad 1: Spočtěte primitivní funkci

$$\int \frac{(2 \cos x + 5) \cdot \operatorname{tg} x}{(2 - \sin^2 x)(11 - \sin^2 x + 6 \cos x)} dx$$

na maximálních intervalech, kde existuje. (11 bodů)

Příklad 2: Určete povahu (definitnost) kvadratické formy Q reprezentované maticí

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 & 5 \\ -2 & -2 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & -3 & 3 \\ 5 & 2 & 3 & -12 \end{pmatrix}$$

a spočtěte hodnotu $Q \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$. (9 bodů)

Příklad 3: Najděte všechna vlastní čísla a jim příslušné vlastní vektory pro matici

$$\begin{pmatrix} 7 & -6 & 16 \\ 12 & -11 & 36 \\ 2 & -2 & 9 \end{pmatrix}. \quad (10 \text{ bodů})$$

Příklad 4: Spočtěte limitu (například pomocí Taylorova polynomu):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log \frac{1+e^{2x}}{2} - \log(\cos x + \sin x) + 3 \cos x - 3}{\log(1+x^3)}. \quad (11 \text{ bodů})$$

Příklad 5: Najděte všechny lokální extrémů funkce

$$f(x, y) = \sin(x - 2y) + \cos(2x - y)$$

na množině \mathbf{R}^2 . (9 bodů)

Výsledky

Příklad 1: Primitivní funkce (až na konstantu) je $\frac{19}{78} \log(\cos^2 x + 1) + \frac{4}{39} \operatorname{arctg} \cos x + \frac{1}{156} \log(\cos^2 x + 6 \cos x + 10) - \frac{5}{78} \operatorname{arctg}(\cos x + 3) - \frac{1}{2} \log |\cos x|$ na každém z intervalů $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbf{Z}$. (Lze použít substituci $y = \cos x$ pro převod na integrál z racionální funkce.)

Příklad 2: Kvadratická forma je negativně semidefinitní a nikoli negativně definitní, hodnota v uvedeném bodě je -18 .

Příklad 3: Vlastní čísla jsou $1, -1, 5$, všechna násobnosti 1 . Vlastní vektory příslušné vlastnímu číslu 1 jsou $c \cdot [1, 1, 0]$, $c \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$. Vlastní vektory příslušné vlastnímu číslu -1 jsou $c \cdot [7, 12, 1]$, $c \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$. Vlastní vektory příslušné vlastnímu číslu 5 jsou $c \cdot [1, 3, 1]$, $c \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$.

Příklad 4: $-\frac{2}{3}$. (Je třeba použít Taylorův polynom čitatele řádu 3 v bodě 0 .)

Příklad 5: Stacionární body jsou $[\frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}n\pi + l\pi, \frac{1}{3}n\pi]$, $l, n \in \mathbf{Z}$. Je-li l sudé a n liché, jde o ostré lokální maximum, je-li l liché a n sudé, jde o ostré lokální minimum. V ostatních případech (l, n sudá či l, n lichá) jde o sedlový bod.