Početní písemná část zkoušky z Matematiky III pro IES FSV UK (D)

Zimní semestr 2020/2021

Příklad 1: Spočtěte (Riemannův) integrál

$$\int_0^{\frac{5}{2}\pi} \frac{1+\sin^2 x}{(3+\cos^2 x)(4-\cos^2 x)}\,dx. \qquad \text{(11 bodů)}$$

Příklad 2: Určete povahu (definitnost) kvadratické formy Q reprezentované maticí

$$\begin{pmatrix} 15 & 9 & 1 & 7 \\ 9 & 6 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 7 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

a spočtěte hodnotu $Q\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$. (9 bodů)

Příklad 3: Najděte všechna vlastní čísla a jim příslušné vlastní vektory pro matici

$$\begin{pmatrix} -3 & -1 & 2 \\ 6 & 5 & 2 \\ -6 & -6 & -3 \end{pmatrix}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad 4: Spočtěte limitu (například pomocí Taylorova polynomu):

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(2\sin x) - \cos(\sin x) + \sin^2 x + \frac{x^2}{2}}{1-\cos(x^2)}. \qquad \text{(11 bodů)}$$

Příklad 5: Najděte všechny lokální extrémy funkce

$$f(x,y) = \log(y^3 - x) - \frac{2}{3}x^2 - y^2$$

na množině $M = \{[x,y] \in \mathbf{R}^2 \colon x < y^3\}$. (9 bodů)

Výsledky

Příklad 1: $\frac{5\pi\sqrt{3}}{28}$. (Integrál se rovná $5\int_0^{\frac{\pi}{2}}$, pak lze pomocí substituce $y = \operatorname{tg} x$ převést na integrál z racionální funkce.)

Příklad 2: Kvadratická forma je indefinitní, hodnota v uvedeném bodě je 4.

Příklad 3: Vlastní čísla jsou $-1, 3i, -3i$, všechna násobnosti 1. Vlastní vektory příslušné vlastnímu číslu -1 jsou $c \cdot [\frac{7}{3}, -\frac{8}{3}, 1]$, $c \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$. Vlastní vektory příslušné vlastnímu číslu $3i$ jsou $c \cdot [\frac{1-i}{2}, -1, 1]$, $c \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$. Vlastní vektory příslušné vlastnímu číslu $-3i$ jsou $c \cdot [\frac{1+i}{2}, -1, 1]$, $c \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$.

Příklad 4: $\frac{19}{12}$. (Je třeba použít Taylorův polynom řádu 4 čitatele v bodě 0.)

Příklad 5: Ostrá lokální maxima v bodech $[-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0]$ a $[-\frac{1}{2}, 1]$. (Sedlový bod $[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}]$.)