

Počtení písemná část zkoušky z Matematiky III pro IES FSV UK (E)

Zimní semestr 2020/2021

Příklad 1: Spočtěte primitivní funkci

$$\int \frac{1}{(4x^2 + 4x + 5)(\sqrt{4x^2 + 4x + 5} - 2x - 3)^2} dx$$

na maximálních intervalech, kde existuje. (11 bodů)

Příklad 2: Určete povahu (definitnost) kvadratické formy Q reprezentované maticí

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 5 & 5 \\ -1 & 5 & 6 & 5 \\ 1 & 5 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

a spočtěte hodnotu $Q \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$. (9 bodů)

Příklad 3: Najděte všechna vlastní čísla a jim příslušné vlastní vektory pro matici

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 & -8 \\ -5 & -4 & 9 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix}. \quad (10 \text{ bodů})$$

Příklad 4: Spočtěte limitu (například pomocí Taylorova polynomu):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \sin(x^2))^{\cos x} - 2(\cos x)^{\cos x} + 1}{(e^x - 1)^4}. \quad (11 \text{ bodů})$$

Příklad 5: Najděte všechny lokální extrémů funkce

$$f(x, y) = (x - y)^{x^2 - 4y^2}$$

na množině $M = \{[x, y] \in \mathbf{R}^2 : x > y\}$. (9 bodů)

Výsledky

Příklad 1: Primitivní funkce (až na konstantu) je

$$-\frac{1}{32} \log \left((\sqrt{4x^2 + 4x + 5} - 2x)^2 - 2(\sqrt{4x^2 + 4x + 5} - 2x) + 5 \right) \\ + \frac{1}{16} \log \left| \sqrt{4x^2 + 4x + 5} - 2x - 3 \right| + \frac{1}{8(\sqrt{4x^2 + 4x + 5} - 2x - 3)} \text{ na intervalu } \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \\ \text{a na intervalu } \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right).$$

(Lze použít Eulerovu substituci $y = \sqrt{4x^2 + 4x + 5} - 2x$ pro převod na integrál z racionální funkce.)

Příklad 2: Kvadratická forma je pozitivně semidefinitní a nikoli pozitivně definitní, hodnota v uvedeném bodě je 22.

Příklad 3: Vlastní čísla jsou 11 (násobnosti 2) a -3 (násobnosti 1). Vlastní vektory příslušné vlastnímu číslu 1 jsou $c \cdot [-1, 1, 0]$, $c \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$. Vlastní vektory příslušné vlastnímu číslu -3 jsou $c \cdot [\frac{7}{3}, -\frac{8}{3}, 1]$, $c \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$.

Příklad 4: $-\frac{1}{12}$. (Je třeba použít Taylorův polynom čitatele řádu 4 v bodě 0.)

Příklad 5: Ostré lokální minimum v bodě $[\frac{4}{3\sqrt{e}}, \frac{1}{3\sqrt{e}}]$. (Sedlové body $[2, 1]$ a $[\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}]$.)