Početní písemná část z Matematiky IV (B) pro IES FSV UK

Letní semestr 2020/2021

Příklad 1: (14 bodů) Uvažujme diferenciální rovnici

$$y''' - 5y'' + 3y' + 9y = 4e^{-x}$$

a. Najděte všechna maximální řešení této diferenciální rovnice.
b. Najděte maximální řešení splňující počáteční podmínky $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$.
c. Spočtěte limitu $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-3x}y(x)$ pro každé řešení, pro které tato limita existuje.

Příklad 2: (14 bodů) Uvažujme diferenciální rovnici

$$y' = \frac{1}{y} \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{y^2 - 9x^2} + \frac{y}{x}$$

a. Najděte všechna maximální řešení této diferenciální rovnice.
b. Najděte maximální řešení splňující počáteční podmínku $y(1) = 1$.

Příklad 3: (14 bodů) Uvažujme autonomní diferenciální rovnici

$$y' = \frac{1}{y} \cdot \sqrt{|e^{y^2} - e|}$$

Na základě vyšetření monotonie a definičních oborů řešení určete a načrtněte následující množiny:

a. Množina všech bodů v $\mathbf{R}^2$, kterými prochází nějaké rostoucí řešení.
b. Množina všech bodů v $\mathbf{R}^2$, kterými prochází nějaké rostoucí maximální řešení.
c. Množina všech bodů v $\mathbf{R}^2$, kterými prochází nějaké řešení definované na $\mathbf{R}$.
d. Množina všech bodů v $\mathbf{R}^2$, kterými prochází právě jedno maximální řešení.

Příklad 4: (14 bodů) Uvažujme diferenciální rovnici

$$y' \cdot \left(xy + \frac{xy}{y^2+1}\right) + y^2 + \log(y^2+1) = 0$$

a. Najděte rovnici popisující řešení této diferenciální rovnice, v níž se už nevyskytují derivace neznámé funkce.
b. Pomocí rovnice nalezené v úloze a dokažte, že existuje řešení splňující počáteční podmínku $y(1) = 1$.
c. Je řešení z úlohy b na okolí bodu 1 rostoucí, nebo klesající?

Příklad 5: (14 bodů) Uvažujme soustavu diferenciálních rovnic

$$\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 5 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 3 \\ 1 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{x}$$

a. Najděte fundamentální matici této soustavy.
b. Spočtěte limitu $\lim\limits_{t\to+\infty} x_2(t)$ pro každé řešení, pro které limita existuje.
c. Spočtěte limitu $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-2t} \cdot x_1(t)$ pro každé řešení, pro které limita existuje.

Výsledky

Příklad 1:

a. $y(x) = \frac{1}{4}xe^{-x} + ae^{-x} + (b + cx)e^{3x}$, $x \in \mathbf{R}$ $(a, b, c \in \mathbf{R})$.

b. $y(x) = \frac{1}{4}xe^{-x} + \frac{1}{8}e^{-x} + (-\frac{1}{8} + \frac{1}{4}x)e^{3x}$, $x \in \mathbf{R}$.

c. Limita je $+\infty$, pokud $c > 0$; $-\infty$, pokud $c < 0$; b, pokud $c = 0$.

Příklad 2:

a. Maximální řešení jsou:

(i) $y(x) = 3x$, $x \in (-\infty, 0)$; $y(x) = 3x$, $x \in (0, +\infty)$;

(ii) $y(x) = \begin{cases} x\sqrt{9 + \sqrt{\frac{64}{27}(\log|x| + c)^3}}, & x \in (-\infty, -e^{-c}), \\ 3x, & x \in \langle -e^{-c}, 0) \end{cases}$ pro $c \in \mathbf{R}$;

(iii) $y(x) = \begin{cases} x\sqrt{9 + \sqrt{\frac{64}{27}(\log|x| + c)^3}}, & x \in (e^{-c}, +\infty), \\ 3x, & x \in (0, -e^{-c}\rangle \end{cases}$ pro $c \in \mathbf{R}$;

(iv) $y(x) = \begin{cases} x\sqrt{9 - \sqrt{\frac{64}{27}(\log|x| + c)^3}}, & x \in (-e^{\frac{9}{4}\sqrt[3]{3} - c}, -e^{-c}), \\ 3x, & x \in \langle -e^{-c}, 0) \end{cases}$ pro $c \in \mathbf{R}$;

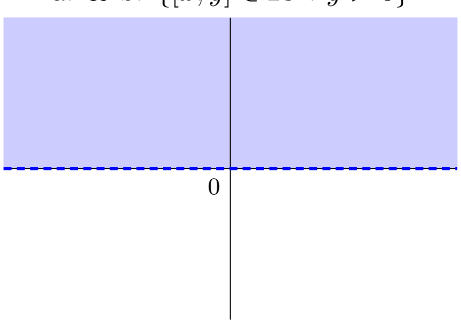
(v) $y(x) = \begin{cases} x\sqrt{9 - \sqrt{\frac{64}{27}(\log|x| + c)^3}}, & x \in (e^{-c}, e^{\frac{9}{4}\sqrt[3]{3} - c}), \\ 3x, & x \in (0, -e^{-c}\rangle \end{cases}$ pro $c \in \mathbf{R}$;

(vi) Řešení z bodů (i)–(v) vynásobené -1.

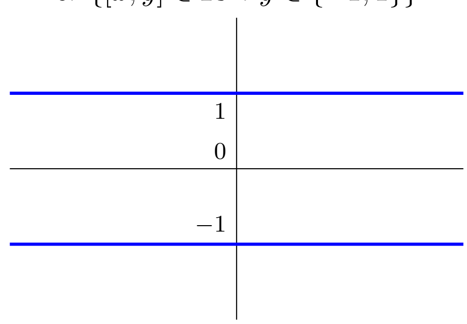
b. Jde o řešení z bodu a.(v) pro $c = 3$, tj. $y(x) = \begin{cases} x\sqrt{9 - \sqrt{\frac{64}{27}(\log|x| + 3)^3}}, & x \in (e^{-3}, e^{\frac{9}{4}\sqrt[3]{3} - 3}), \\ 3x, & x \in (0, -e^{-c}\rangle. \end{cases}$

Příklad 3:

a. & b. $\{[x, y] \in \mathbf{R}^2 \colon y > 0\}$



c. $\{[x, y] \in \mathbf{R}^2 \colon y \in \{-1, 1\}\}$



d. $\emptyset$

Příklad 4:

a. $x^2(y^2 + \log(y^2 + 1)) = c$, kde $c \in \mathbf{R}$. (Po vynásobení integračním faktorem x dostaneme exaktní rovnici.)

b. Takové řešení je popsáno rovnicí $x^2(y^2 + \log(y^2 + 1)) = 1 + \log 2$. Existence plyne například z věty o implicitní funkci (parciální derivace podle y levé strany v bodě $[1, 1]$ není nula).

c. Řešení je klesající na okolí bodu 1, protože $y'(1) = -\frac{2}{3}(1 + \log 2) < 0$. Derivaci lze spočítat buď z věty o implicitní funkci nebo přímo z diferenciální rovnice.

Příklad 5:

a. Fundamentální matice je (například) $\begin{pmatrix} -\frac{19}{14} & -7e^{2t} & e^{11t} & -e^{2t} \\ -\frac{4}{7} & e^{2t} & e^{11t} & 0 \\ \frac{3}{14} & 0 & e^{11t} & e^{2t} \\ 1 & e^{2t} & e^{11t} & 0 \end{pmatrix}$.

b. $x_2(t) = -\frac{4}{7}a + be^{2t} + ce^{11t}$. Limita je $+\infty$, pokud $c > 0$; $-\infty$, pokud $c < 0$; $+\infty$, pokud $c = 0$ a $b > 0$; $-\infty$, pokud $c = 0$ a $b < 0$; $-\frac{4}{7}a$, pokud $b = c = 0$.

c. $x_1(t) = -\frac{19}{14}a - 7be^{2t} + ce^{11t} - de^{2t}$. Limita je $+\infty$, pokud $c > 0$; $-\infty$, pokud $c < 0$; $-7b - d$, pokud $c = 0$.