Početní písemná část z Matematiky IV (C) pro IES FSV UK

Letní semestr 2020/2021

Příklad 1: (14 bodů) Uvažujme diferenciální rovnici

$$x^3 y''' - 3xy' + 3y = x^2$$

a. Najděte všechna řešení této diferenciální rovnice na intervalu $(0, +\infty)$.
b. Najděte všechna řešení této diferenciální rovnice na intervalu $(-\infty, 0)$.
c. Najděte všechna řešení této diferenciální rovnice na $\mathbf{R}$.
d. Spočtěte limitu $\lim\limits_{x \to 0+} \frac{y(x)}{x}$ pro každé řešení, pro které tato limita existuje.

Příklad 2: (14 bodů) Uvažujme diferenciální rovnici

$$y' = \frac{1}{y} \cdot \left(e^{y^2} - e\right) \cdot x^2$$

a. Najděte všechna maximální řešení této diferenciální rovnice.
b. Načrtněte grafy maximálních řešení.
c. Najděte maximální řešení splňující počáteční podmínku $y(0) = 2$.

Příklad 3: (14 bodů) Uvažujme autonomní diferenciální rovnici

$$y' = \sqrt[3]{\operatorname{arctg} y - \frac{\pi}{6}} \cdot \left(\operatorname{arctg}^2 y - \frac{\pi^2}{16}\right)$$

Na základě vyšetření monotonie a definičních oborů řešení určete a načrtněte následující množiny:

a. Množina všech bodů v $\mathbf{R}^2$, kterými prochází nějaké rostoucí řešení.
b. Množina všech bodů v $\mathbf{R}^2$, kterými prochází nějaké rostoucí maximální řešení.
c. Množina všech bodů v $\mathbf{R}^2$, kterými prochází nějaké klesající maximální řešení.
d. Množina všech bodů v $\mathbf{R}^2$, kterými prochází právě jedno maximální řešení.

Příklad 4: (14 bodů) Uvažujme diferenciální rovnici

$$y' + \frac{y}{x} = \sqrt[3]{y} \cdot e^{\sqrt[3]{x^5}}$$

a. Najděte tvar všech řešení této diferenciální rovnice, které nenabývají nuly, a popište jejich definiční obory pomocí vhodné nerovnosti.
b. Najděte explicitní tvar definičních oborů řešení z úlohy a.
c. Popište všechna maximální řešení této diferenciální rovnice.

Příklad 5: (14 bodů) Uvažujme soustavu diferenciálních rovnic

$$\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{x}$$

a. Najděte obecný tvar x_4, tj. čtvrté složky řešení.
b. Spočtěte limitu $\lim\limits_{t\to-\infty} e^t x_4(t)$ pro každé řešení, pro které limita existuje.
c. Spočtěte limitu $\lim\limits_{t\to+\infty} x_4(t)$ pro každé řešení, pro které limita existuje.

Výsledky

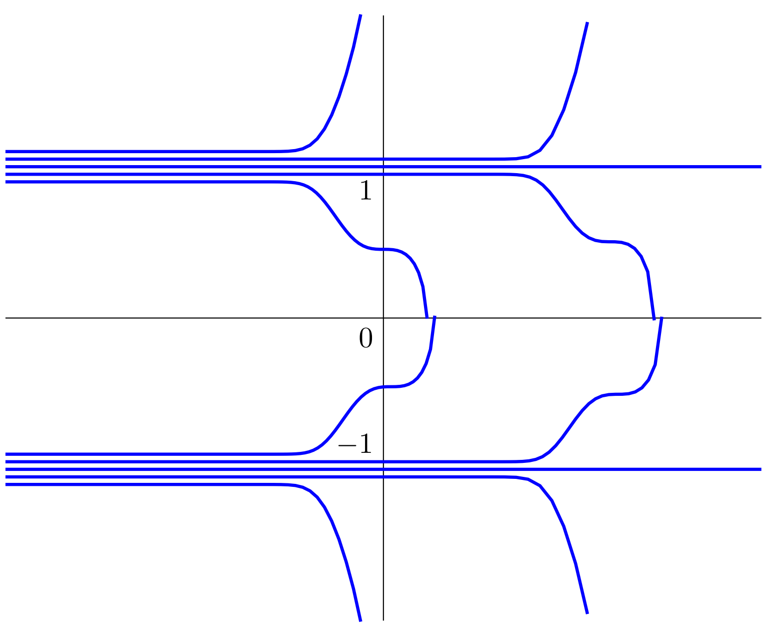
Příklad 1:

a. $y(x) = -\frac{1}{3}x^2 + ax + \frac{b}{x} + cx^3$, $x \in (0, +\infty)$ $(a, b, c \in \mathbf{R})$.
b. Řešení mají stejný tvar, tj. $y(x) = -\frac{1}{3}x^2 + ax + \frac{b}{x} + cx^3$, $x \in (-\infty, 0)$ $(a, b, c \in \mathbf{R})$.
c. $y(x) = -\frac{1}{3}x^2 + ax + cx^3$, $x \in \mathbf{R}$ $(a, c \in \mathbf{R})$.
d. Limita je $+\infty$, pokud $b > 0$; $-\infty$, pokud $b < 0$; a, pokud $b = 0$.

Příklad 2:

a. Maximální řešení jsou:
(i) $y(x) = 1$, $x \in \mathbf{R}$; $y(x) = -1$, $x \in \mathbf{R}$;
(ii) $y(x) = \sqrt{1 - \log\left(1 - \exp\left(\frac{2}{3}ex^3 + 2ec\right)\right)}$, $x \in (-\infty, -\sqrt[3]{3c}$ pro $c \in \mathbf{R}$;
(iii) $y(x) = \sqrt{1 - \log\left(1 + \exp\left(\frac{2}{3}ex^3 + 2ec\right)\right)}$, $x \in (-\infty, \sqrt[3]{\frac{3}{2e}\log(e-1) - 3c}$ pro $c \in \mathbf{R}$;
(iv) Řešení z bodů (ii) a (iii) vynásobené -1.

b.

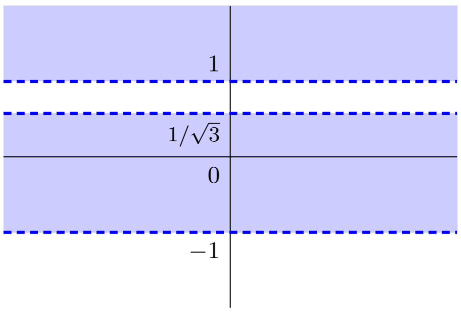


Poznámka: Ty obloučky mezi 0 a 1, resp. 0 a -1, tam vyjdou, ale nečeká se, že je studenti objeví standardním výpočtem.

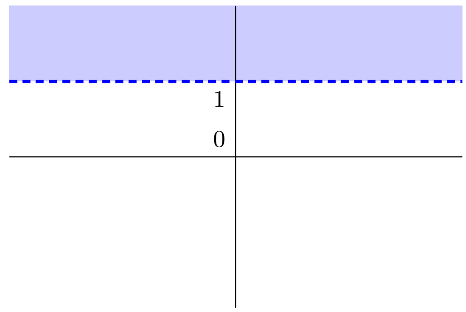
c. Jde o řešení z bodu a.(ii) pro $c = \frac{1}{2e}\log(1 - e^{-3})$.

Příklad 3:

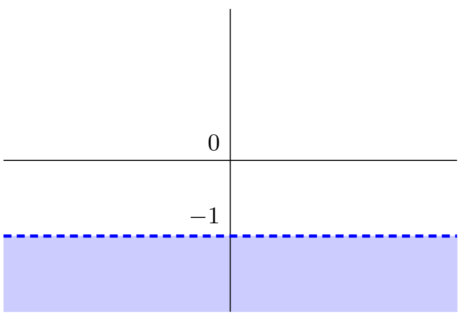
a. $\{[x,y] \in \mathbf{R}^2 \colon y \in (-1, \frac{1}{\sqrt{3}}) \cup (1, +\infty)\}$



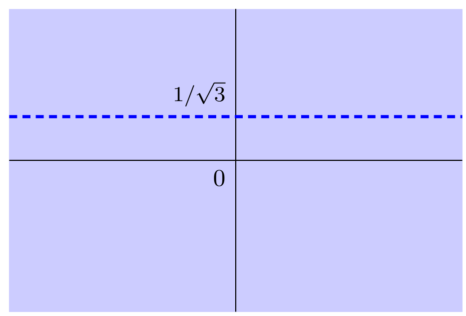
b. $\{[x,y] \in \mathbf{R}^2 \colon y > 1\}$



c. $\{[x,y] \in \mathbf{R}^2 \colon y < -1\}$



d. $\{[x,y] \in \mathbf{R}^2 \colon y \neq \frac{1}{\sqrt{3}}\}$



Příklad 4:

a. $y(x) = \pm\sqrt{\left(\frac{2}{5}\frac{e^{\sqrt[3]{x^5}}}{\sqrt[3]{x^2}} + \frac{2}{3}\cdot\frac{c}{\sqrt[3]{x^2}}\right)^3}$, kde $c \in \mathbf{R}$, na intervalech, kde výraz pod odmocninou je kladný.

b. V závislosti na $c \in \mathbf{R}$ jsou definiční obory následující:
- $c \geq 0$: $(-\infty, 0)$ nebo $(0, +\infty)$;
- $c \in (-\frac{3}{5}, 0)$: $(\sqrt[5]{\log^3(-\frac{5}{3}c)}, 0)$ nebo $(0, +\infty)$;
- $c = -\frac{3}{5}$: $(0, +\infty)$;
- $c < -\frac{3}{5}$: $(\sqrt[5]{\log^3(-\frac{5}{3}c)}, +\infty)$

c. Maximální řešení jsou:
- Konstatní nulová funkce na $(-\infty, 0)$ nebo na $(0, +\infty)$;
- řešení z bodu a. na $(0, +\infty)$, kde $c > -\frac{3}{5}$;
- řešení z bodu a. na $(-\infty, 0)$, kde $c \geq 0$;
- $y(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty, \sqrt[5]{\log^3(-\frac{5}{3}c)}\rangle, \\ \sqrt{\left(\frac{2}{5}\frac{e^{\sqrt[3]{x^5}}}{\sqrt[3]{x^2}} + \frac{2}{3}\cdot\frac{c}{\sqrt[3]{x^2}}\right)^3} & x \in (\sqrt[5]{\log^3(-\frac{5}{3}c)}, 0), \end{cases}$ kde $c \in (-\frac{3}{5}, 0)$ a toto řešení vynásobené -1;

- $y(x) = \begin{cases} 0 & x \in (0, \sqrt[5]{\log^3(-\frac{5}{3}c)}\rangle, \\ \sqrt{\left(\frac{2}{5}\frac{e^{\sqrt[3]{x^5}}}{\sqrt[3]{x^2}} + \frac{2}{3} \cdot \frac{c}{\sqrt[3]{x^2}}\right)^3} & x \in (\sqrt[5]{\log^3(-\frac{5}{3}c)}, +\infty), \end{cases}$ kde $c < -\frac{3}{5}$ a toto řešení vynásobené -1.

Příklad 5:

a. $x_4(t) = ae^{-t} + e^{5t}(b\cos 2t + c\sin 2t)$, $t \in \mathbf{R}$ $(a, b, c \in \mathbf{R})$;
b. limita je rovna a pro každé řešení;
c. limita je rovna 0, pokud $b = c = 0$, v ostatních případech neexistuje.