TEORIE MÍRY A INTEGRÁLU

Úvodní poznámky. Záměrem je nabídnout rozdělení přednášky do dvou částí tak, aby absolvování druhé části nebylo bezpodmínečně nutné pro studium dalších povinných předmětů bakalářského programu Obecná matematika. Cvičení je pouze k první přednášce, ta tedy zároveň musí obsahovat látku potřebnou k základnímu kalkulu integrálu. První část přednášky musí samozřejmě obsahovat všechnu látku potřebnou v jiných povinných přednáškách OM.

Toto rozdělení je třeba brát pouze jako možnou variantu. Z hlediska samotné přednášky TMI je výhodnější mít jednu přednášku 4/2, jako tomu je dosud. V případě rozdělení by bylo obtížnější synchronizovat zkrácenou přednášku s cvičením. Dalším problémem by bylo, kdyby přednáška MA4 používala věty o konstrukci míry z vnější míry, jak tomu bylo v roce 2015 - pokud by se s tímto počítalo, nebylo by možné přednášku TMI dělit.

Stručný komentář ke změnám oproti dosavadnímu sylabu: Konstrukční věty pro míru jsou koncipovány systematičtěji za pomoci Hahn-Kolmogorovovy věty (dříve byla v sylabu označována jako Hopfova věta), jak je běžné ve standardních kursech míry a pravděpodobnosti. U prostorů L^p předpokádáme jejich zavedení v MA (Hölderova nerovnost, úplnost). V druhé části přednášky jsou jako možnosti doplněny některé další partie (důkaz věty o substituci, existence součinové míry na $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, příklad lebesgueovsky neměřitelné množiny, stejnoměrná integrovatelnost funkcí) s představou určité svobody přednášejícího rozhodnout se některé z důkazů případně vynechat nebo jen naznačit.

Date: verze č. 1 - pracovní, 11.5.2017.

1. Základní přednáška, 2/2

1.1. **Úvod.** 1 hod.

- Připomenutí Riemannova integrálu
- Jordanův objem, konečná x spočetná aditivita

1.2. **Prostor s mírou.** 2 hod.

- σ-algebra, σ-obal, borelovské množiny
- měřitelný prostor, pramíra, míra, σ-konečnost
- spojitost míry
- nulové množiny, zúplnění míry (bez důkazu?)
- příklady měr: Diracova míra, aritmetická míra, Lebesgueova míra

1.3. **Měřitelnost.** 3 hod.

- vzor σ-algebry
- měřitelné zobrazení (definice), měřitelná funkce, borelovská funkce
- obraz míry měřitelným zobrazením
- borelovské množiny jsou generovány kvádry
- měřitelnost součtu, součinu, maxima, suprema, limity...

1.4. **Abstraktní Lebesgueův integrál.** 4 hod.

- aproximace nezáporné měřitelné funkce jednoduchými funkcemi
- definice integrálu, integrovatelné funkce, monotonie integrálu
- Leviho věta, Fatouovo lemma
- linearita integrálu, odhady s absolutní hodnotou, též pro integrál z komplexní funkce
- souvislost Lebesgueova a Riemannova, Newtonova integrálu v $\mathbb{R}$ (bez důkazu)
- integrál a rovnost skoro všude
- Lebesgueova věta [Dominated convergence theorem]

1.5. **Integrály závislé na parametru.** 2 hod.

- Věta o spojité závislosti integrálu
- Záměna integrálu a derivace
- Příklady: funkce Gamma, Beta

1.6. **Jednoznačnost a existence míry.** 2 hod.

- Věta o jednoznačnosti (bez důkazu?)
- Věta o existenci rozšíření pramíry na míru (Hahn-Kolmogorovova věta, bez důkazu)
- důsledek: jednoznačnost a existence Lebesgueovy míry

1.7. Součin měr a Fubiniova věta. 3 hod.

- součinová σ-algebra
- existence a jednoznačnost součinové míry (bez důkazu ?)
- Fubiniova a Tonelliova věta
- součin Lebesgueových měr, Fubiniova věta pro Leb. míru

1.8. Věta o substituci. 2 hod.

- motivace - věta o substituci pro Newtonův integrál
- deformace Leb. míry při afinním zobrazení
- věta o substituci (bez důkazu)

1.9. Absolutně spojité a singulární míry. 2 hod.

- absolutní spojitost měr
- Radon-Nikodymova věta (bez důkazu)
- rozklad míry na absolutně spojitou a singulární část (bez důkazu)

1.10. Distribuční funkce. 3 hod.

- korespondence distribučních funkcí a konečných borelovských měr na $\mathbb{R}$
- absolutně spojité, spojité a diskrétní míry
- Lebesgue-Stieltjesův integrál, per partes

1.11. Konvergence v L^p, s.j. a podle míry. 2 hod.

- L^p-norma a konvergence
- konvergence skoro všude a v L^1, konvergentní majoranta
- konvergence podle míry, Čebyševova nerovnost, souvislost s konvergencí s.j.

2. Doplňující přednáška, 2/0

2.1. Vnější míra a Caratheodoryho konstrukce. 4 hod.
- definice vnější míry a měřitelnosti vzhledem k vnější míře
- Caratheodoryho věta (konstrukce míry z vnější míry)
- metrická vnější míra a měřitelnost borelovských množin

2.2. Konstrukce Lebesgueovy míry. 5 hod.
- důkaz Hahn-Kolmogorovovy věty
- konstrukce Lebesgueovy míry pomocí vnější míry
- důkaz regularity a dalších vlastností Lebesgueovy míry

2.3. Součinové míry. 2 hod.
- existence konečných součinů
- příklad - nekonečný součin - pravděp. míra na $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ (?)

2.4. Radon-Nikodymova věta. 3 hod.
- důkaz Radon-Nikodymovy věty
- důkaz rozkladu míry na absolutně spojitou a singulární část

2.5. Znaménkové míry. 2 hod.
- důkaz existence kladné, záporné množiny (Hahn-Banachův rozklad)
- důkaz Jordanova rozkladu míry na kladnou a zápornou část

2.6. Konvergence posloupnosti funkcí. 4 hod.
- Porovnání konvergence s.j., v L^p a podle míry
- z posloupnosti konvergující podle míry lze vybrat podposloupnost konvergující s.v.
- stejnoměrná integrovatelnost a konvergence v L^1 a podle míry

2.7. Další důkazy. 4 hod.
- Vztah Lebesgueova a Riemannova integrálu
- Věta o substituci (?)

2.8. Příklad neměřitelné množiny. 2 hod.