2. zkoušková písemka, NMAF052, LS 2010

Každý krok krátce a správně odůvodněte.

1. Vyšetřete konvergenci následujících řad:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\frac{n\pi}{2})}{\lg(n)} \cdot \frac{n}{n+1}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\frac{1}{n^2}).$$

2. a) Najděte všechna řešení diferenciální rovnice

$$y' = xy^2.$$

Věnujte pozornost určení definičních oborů řešení. Načrtněte obrázek.

b) Napište fundamentální systém řešení rovnice

$$y'' - 2y' + 2y = e^x \sin(x).$$

Napište v jakém tvaru budete hledat partikulární řešení (nehledejte ho).

3. Nalezněte

$$\sup_M f, \quad \inf_M f,$$

je-li

$$f(x,y) = xy \lg(x^2+y^2), \quad M = \{(x,y) \in \mathbb{R}; x^2+y^2 \in (1,2), x > 0, y > 0\}.$$

4. Předpokládejte, že

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{na } \mathbb{R}^2$$

pro funkci $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Proveďte záměnu souřadnic $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\Phi(s,t) = (s+t, s-t)$ v diferenciální rovnici. Zjistěte jakou diferenciální rovnici splňuje $v = u \circ \Phi$. Bonus: Najděte obecný tvar u.

Varianta 2

1) $(\tilde{R}1) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sin(\frac{n\pi}{2})}{\lg n} \cdot \frac{n}{n+1}$ konverguje $\Leftarrow$ $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sin(\frac{n\pi}{2})}{\lg n}$ konverguje $= (\tilde{R}2)$

podle Abelova kritéria: $\frac{n}{n+1}$ je monotónní posl.

$\in [\frac{2}{3}, 1]$ (2)

$(\tilde{R}2)$ konverguje podle Dirichleta: $\sin\frac{n\pi}{2}$ má omezené č. součty

$\frac{1}{\lg n} \to 0$ monotónně

tedy $(\tilde{R}1)$ konverguje (2)

$(\tilde{R}1)$ nekonverguje absolutně protože $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|\sin\frac{n\pi}{2}|}{\lg n} \cdot \frac{n}{n+1}$ konverguje $\Leftrightarrow$

$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{|\sin\frac{n\pi}{2}|}{\lg n}$ konverguje $(\tilde{R}3)$ a $(\tilde{R}3) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\lg(2k+1)}$ a ta diverguje (2)

• $\sum_{n=2}^{+\infty} \lg n \cdot \sin\frac{1}{n^2}$ konverguje podle srovnávacího kritéria, protože

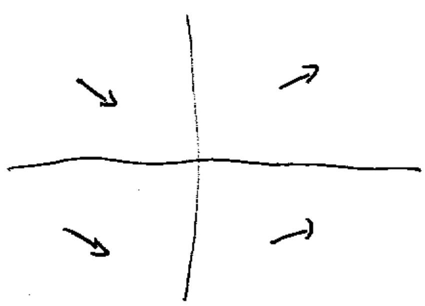
$$\lg n \cdot \sin\frac{1}{n^2} = \frac{\lg n}{n^{1/3}} \cdot \frac{\sin\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} \cdot \frac{1}{n^{5/3}} \quad \text{a}$$

$\frac{\lg n}{n^{1/3}} \to 0$ pro $n \to +\infty$; $\frac{\sin\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} \to 1$ pro $n \to +\infty$

tedy ex. $c > 0$: $\lg n \cdot \sin\frac{1}{n^2} < c\,\frac{1}{n^{5/3}}$ a $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{5/3}}$ konverguje (4)

2) $y' = x y^2$ · pravá strana je $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ $\to$ ex. + jednozn. (1)

$y(x) = 0$ na $\mathbb{R}$ je řešení, pro $y \neq 0$: (1)

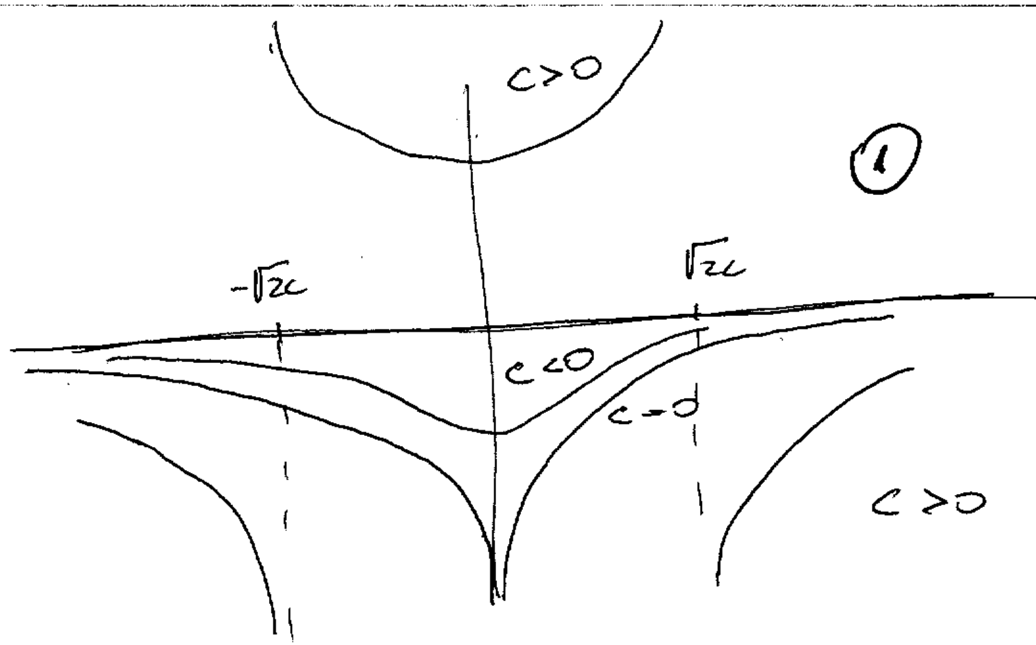


$\frac{y'}{y^2} = x$; $\left(-\frac{1}{y}\right)' = \left(\frac{x^2}{2} + c\right)'$

$-\frac{1}{y} = \frac{x^2}{2} + c$; $\frac{1}{y} = -\frac{x^2}{2} - c$; $y(x) = \frac{-1}{\frac{x^2}{2} - c}$

na $\mathbb{R}$ pokud $c < 0$

na $(-\infty, -\sqrt{2c})$ a $(-\sqrt{2c}, \sqrt{2c})$ a $(\sqrt{2c}, +\infty)$ pro $c \geq 0$ (4)

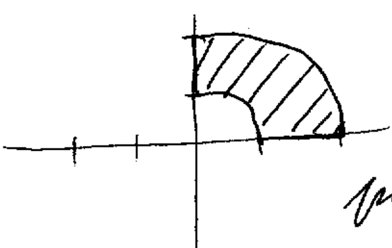


• $y'' - 2y' + 2y = e^x \sin x$ charakteristická rovnice: $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$ (1)

její kořeny: $\frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = 1 \pm i$ FS: $e^x \cos x,\ e^x \sin x$ (1)

Partikulární řešení hledáme ve tvaru $y_p = x\left(Ae^x \cos x + Be^x \sin x\right)$ (1)

3) $f(x,y) = xy \cdot \lg(x^2+y^2)$; $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \in (1,2),\ x>0,\ y>0\}$



Hledejme $\max_{\overline{M}} f$ a $\min_{\overline{M}} f$, ty existují, protože f je spojitá na $\overline{M}$ a $\overline{M}$ je kompaktní. (2)

uvnitř:
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y \cdot \lg(x^2+y^2) + \frac{xy}{x^2+y^2} \cdot 2x \quad = 0 \qquad / \cdot x$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x \cdot \lg(x^2+y^2) + \frac{xy}{x^2+y^2} \cdot 2y \quad = 0 \qquad / \cdot (-y)$$

$$\frac{2}{x^2+y^2} \cdot xy\left(x^2-y^2\right) = 0$$ Buď $x=0$ nebo $y=0$ nebo $x=-y$ (nesplňují) (3)

nebo $x=y$. Pak:

$$\cancel{y} \cdot \lg(2y^2) + \frac{\cancel{2y^3}}{\cancel{2y^2}} = 0 \ ; \ \lg(2y^2) = -1 \ ; \ 2y^2 = e^{-1}$$

$$y^2 = \frac{e^{-1}}{2} \ ; \ y = \pm\sqrt{\frac{1}{2e}} < \frac{1}{2}$$ neleží v M

V2 b: hranice: $x^2+y^2=1$ $\Rightarrow$ $f(x,y) = x\cdot y \cdot \lg(2)$

Lagr. mult.: ($g = x^2+y^2-1$; f je dána, $g, f \in C^{\infty}(\mathbb{R}^2)$

$\nabla g = 0$ pouze v $(x,y) = 0$, které nevadí)

$$\left.\begin{array}{ll} y + 2\lambda x = 0 & /\cdot(-y) \\ x + 2\lambda y = 0 & /\cdot x \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 - y^2 = 0$$

$\Rightarrow x = y$

(3)

$\Rightarrow x = y = 1$

~~Protože postupujeme na $x^2+y^2=2$ $\Rightarrow$ $x=y=1$~~ na $x^2+y^2=1$ je $f \equiv 0$

na $x=0$ a $y=0$ je $f=0$

+ porovnání $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}\cdot \lg 1 = 0$

$f(1,1) = \lg 2$

$\Rightarrow \max_{\overline{M}} f = \lg(2) = f(1,1)$; $\min_{\overline{M}} f = 0$

(2)

Protože $(1,1)$; $(1,0) \in \partial M$ a f je všude kolem spojitá, je

$\sup_{M} f = \lg(2)$ a $\inf_{M} f = 0$ ani jedno se nenabývá,

protože, kdyby ex. body, kde se nabývají, museli by být v předchozí analýze.

(2)

4)

5) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ na $\mathbb{R}^2$

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\ \phi\ } \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\ u\ } \mathbb{R}$$
$$(s,t) \qquad\qquad (x,y)$$

$v(s,t) = u(\phi_1(s,t), \phi_2(s,t))$, inverze ϕ^{-1}

$$\begin{aligned} x &= s+t \\ y &= s-t \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad s = \underbrace{\frac{x+y}{2}}_{\phi_1^{-1}(x,y)}; \quad t = \underbrace{\frac{x-y}{2}}_{\phi_2^{-1}(x,y)}$$ 2

$u(x,y) = v(\phi_1^{-1}(x,y), \phi_2^{-1}(x,y))$

dosadíme: $\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \partial_1 v \cdot \frac{1}{2} + \partial_2 v \cdot \frac{1}{2}$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \partial_1^2 v \cdot \frac{1}{4} + 2\partial_1\partial_2 v \cdot \frac{1}{4} + \partial_2^2 v \cdot \frac{1}{4}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \partial_1 v \cdot \frac{1}{2} - \partial_2 v \frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \partial_1^2 v \frac{1}{4} - 2\partial_1\partial_2 v \frac{1}{4} + \partial_2^2 v \frac{1}{4}$$ 2

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \cancel{4}\ \partial_1\partial_2 v = 0$$ 2

řešme: $\dfrac{\partial}{\partial s}\dfrac{\partial}{\partial t} v(s,t) = 0 \Rightarrow \dfrac{\partial}{\partial t} v(s,t) = c(t)$

$$\Rightarrow v(s,t) = \int c(t)\,dt + d(s) = e(t) + f(s)$$

Tedy obecný tvar u je: $u(x,y) = e\left(\frac{x-y}{2}\right) + f\left(\frac{x+y}{2}\right)$, kde e, f jsou libovolné dostatečně hladké funkce.

Body: 2