OG systémy polynomů

Před řešením příkladů si zopakujte následující definice a věty:

Definice. Buď $a, b \in \mathbf{R}^*$, $a < b$, $\rho : (a, b) \to \mathbf{R}$, $\rho > 0$ na (a, b), $\rho \in L^1(a, b)$, $p \in [1, +\infty)$. Váhový Lebesgue(ův) prostor a příslušnou normu definujeme

$$L^p_\rho(a, b) = \{f : (a, b) \to \mathbf{R}, \text{měřitelná}, \int_a^b \rho|f|^2 < +\infty\},$$
$$\|f\|^p_{p,\rho} = \int_a^b \rho|f|^p.$$

Poznámka. Chápeme-li rovnost v $L^p_\rho(a, b)$ ve smyslu s.v. je $(L^p_\rho(a, b), \|f\|_{p,\rho})$ Banachův prostor. $L^2_\rho(a, b)$ je Hilbertův prostor se skalárním součinem $\langle f, g\rangle = \int_a^b \rho f\overline{g}$.

Základní úloha. Mějme dáno $L^p_\rho(a, b)$. Najděte polynomy P_k tak, $stP_k = k$ a $\langle P_k, P_j\rangle = 0$ pokud $j \neq k$.

Příklady na cvičení

1. Ukažte, že P_k jsou určeny jednoznačně až na konstantu. **2.** Ukažte, že P_k se až na konstantu rovnají $x^k - \sum_{j=0}^k \frac{\langle x^k, P_j\rangle}{\|P_j\|^2} P_j$. **3.** Spočtěte první tři Legendre(ovy) polynomy v $L^2(-1, 1)$. **4.** Spočtěte první tři Laguerre(ovy) polynomy v $L^2_\rho(0, +\infty)$ s $\rho(x) = e^{-x}$. **5.** Spočtěte první tři Hermite(ovy) polynomy v $L^2_\rho(-\infty, +\infty)$ s $\rho(x) = e^{-x^2/2}$. **6.** Dokažte, že P_k má právě k různých (reálných) kořenů v (a, b).

Definice. Pro P_n definujeme čísla k_n, k'_n tak, aby $P_n(x) = k_n x^n + k'_n x^{n-1} + \dots$. Označíme $h_n = \|P_n\|^2$.

7. Dokažte rekurentní formuli:

$$P_{n+1}(x) = (A_n x + B_n)P_n(x) - C_n P_{n-1}(x), \quad A_n = \frac{k_{n+1}}{k_n}, \quad B_n = A_n\left(\frac{k'_{n+1}}{k_{n+1}} - \frac{k'_n}{k_n}\right), \quad C_n = \frac{A_n h_n}{A_{n-1} h_{n-1}}.$$

8. Rodriguezova fle: Buď X polynom nejvýše 2. stupně. Je-li $F_n(x) = \frac{1}{\rho(x)}(\rho(x)X(x)^n)^{(n)}$ polynom stupně n, existuje $K_n \in \mathbf{R}$, že $K_n P_n(x) = F_n(x)$. Dokažte Rodriguezovu formuli v následujících situacích a) $a, b \in \mathbf{R}$, $\alpha, \beta > -1$, $\rho(x) = (x - a)^\alpha(b - x)^\beta$, $X(x) = (x - \alpha)(b - x)$ (Jacobiho polynomy), Legendreovy polynomy jsou speciální případ Jacobiho pro $(a, b) = (-1, 1)$ a $\alpha = \beta = 0$, b) $(a, b) = (0, +\infty)$, $\alpha > -1$, $\rho(x) = x^\alpha e^{-x}$, $X(x) = x$ (Laguerrovy polynomy), c) $(a, b) = (-\infty, +\infty)$, $\rho(x) = e^{-x^2/2}$, $X(x) = 1$ (Hermitovy polynomy). **9.** Ukažte, že P_k splňují diferenciální rovnici: $Xy'' + K_1P_1y' + \lambda_n y = 0$ s $\lambda_n = -n(K_1k_1 + \frac{n-1}{2}X'')$. **10.**

11. Z Rodriguezovy formule odvoďte explicitní tvar Legendreových polynomů na $(-1, 1)$ **12.** Spočtěte pro Legendreovy polynomy konstanty k_n. Asi se vám bude hodit, že $\sum_{j=0}^n \binom{n}{j}\binom{n}{n-j} = \binom{2n}{n}$. Dokažte, z použití binomické věty na $(1+x)^{2n}$. Stačí porovnat koeficienty u x^n. **13.** Spočtěte pro Legendreovy polynomy konstanty k'_n. Možná užijete, že $\sum_{j=1}^n j\binom{n}{j}\binom{n}{n-j} = n\binom{2n-1}{n-1} = n\binom{2n-1}{n}$. Napište binomickou větu pro $(1 + x)^n$ a zderivujte ji. Vynásobte zderivovanou a původní rovnost a x a porovnejte koeficienty u x^n. **14.** Spočtěte pro Legendreovy polynomy λ_n a h_n. **15.** Pro Legendreovy polynomy napište jejich rekurentní formuli a diferenciální rovnici. **16.** Z Rodriguezovy formule odvoďte explicitní tvar Laguerrových polynomů, jejich rekurentní formuli a diferenciální rovnici. **17.** Z Rodriguezovy formule odvoďte explicitní tvar Hermiteových polynomů, jejich rekurentní formuli a diferenciální rovnici.

Poznámka. Legendreovy a Laguerrovy polynomy se používají pro řešení vlnové rovnice pro model atomu vodíku.

Příklady na doma

Výsledky a návody:

– –

Fourierova metoda separace proměnných

viz. http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kaplicky/pages/pages/2011l/rokyta-ndir044-cv10-11.pdf

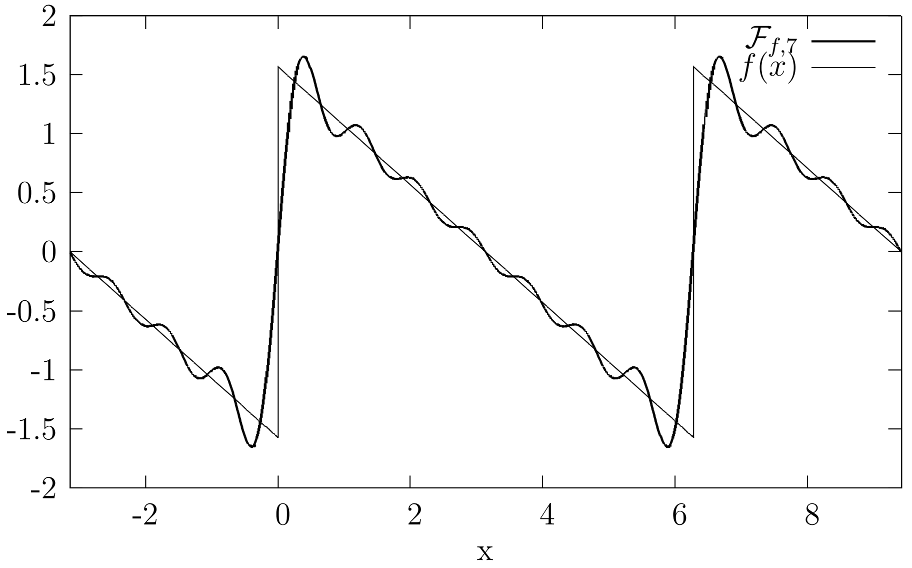
– –

Fourierovy řady

Příklady na cvičení

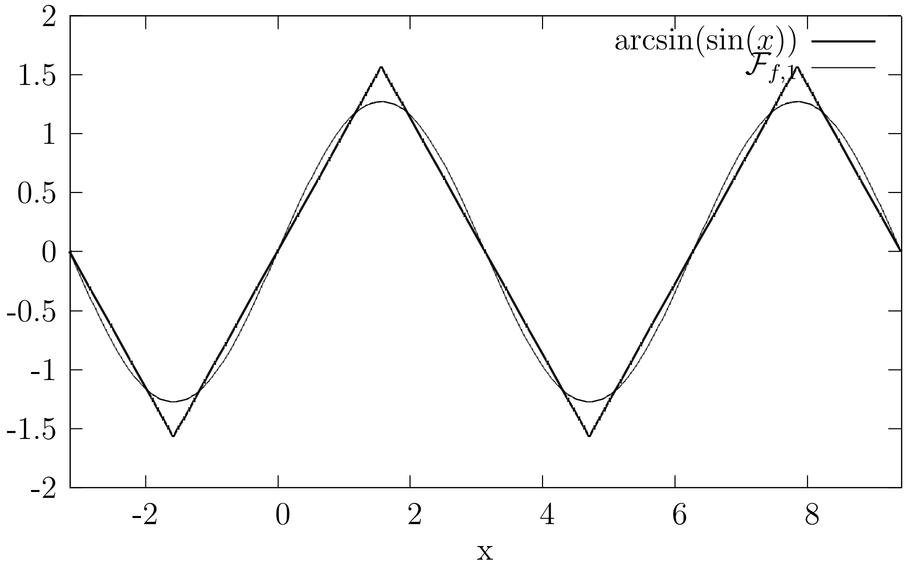
Na intervalu $(0, 2\pi)$ rozviňte do Fourierovy řady funkce **1.** $f(x) = (\pi - x)/2$ **2.** $f(x) = x^2$

Figure 1: Příklad **1**-částečný součet F. řady pro $n = 7$



3. $f(x) = |\sin(x)|$ **4.** $f(x) = \arcsin(\sin(x))$

Figure 2: Příklad **4**-částečný součet F. řady pro $n = 1$



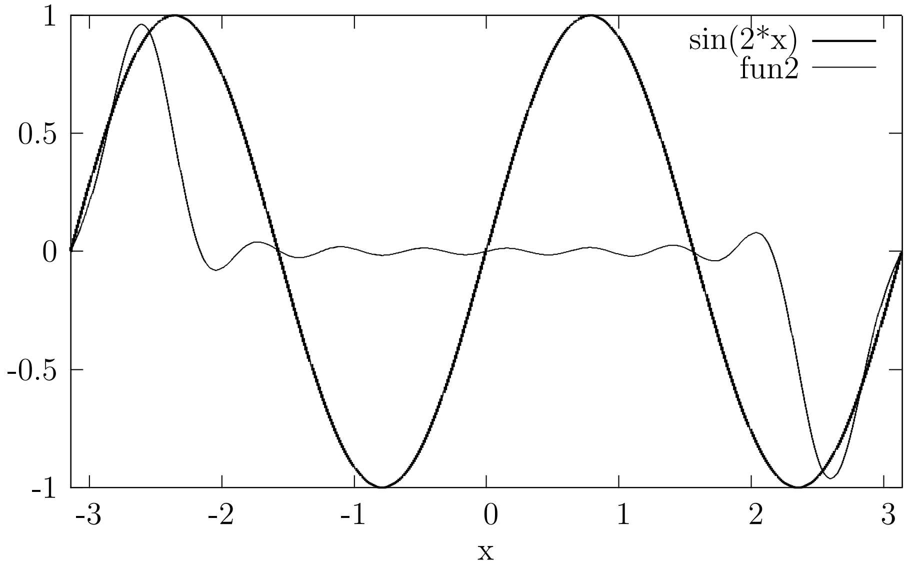
Výsledky a návody: **1.** $\sum_{k=1}^{\infty} \sin(kx)/k$, bodově konverguje k $\tilde{f}(x) = (\pi - y)/2$ pro $y = x \mod 2\pi \in (0, 2\pi)$, $= 0$ pro $0 = x \mod 2\pi$, stejnoměrně konverguje na všech $[c, d] \subset (2m\pi, 2(m+1)\pi)$, $m \in \mathbf{Z}$ **2.** $\frac{4}{3}\pi^2 + \sum_{k=1}^{\infty}(\frac{4}{k^2}\cos(kx) - \frac{4\pi}{k}\sin(kx))$, bodově konverguje k $\tilde{f}(x) = y^2$ pro $y = x \mod 2\pi \in (0, 2\pi)$, $= 2\pi^2$ pro $0 = x \mod 2\pi$, stejnoměrně konverguje na všech $[c, d] \subset (2m\pi, 2(m+1)\pi)$, $m \in \mathbf{Z}$ **3.** $\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2-1}\cos(kx)$, konverguje stejnomětně k f na $\mathbf{R}$ **4.** $\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\sin((2k+1)x)$, konverguje k f stejnoměrně na $\mathbf{R}$

– –

1. zápočtová písemka

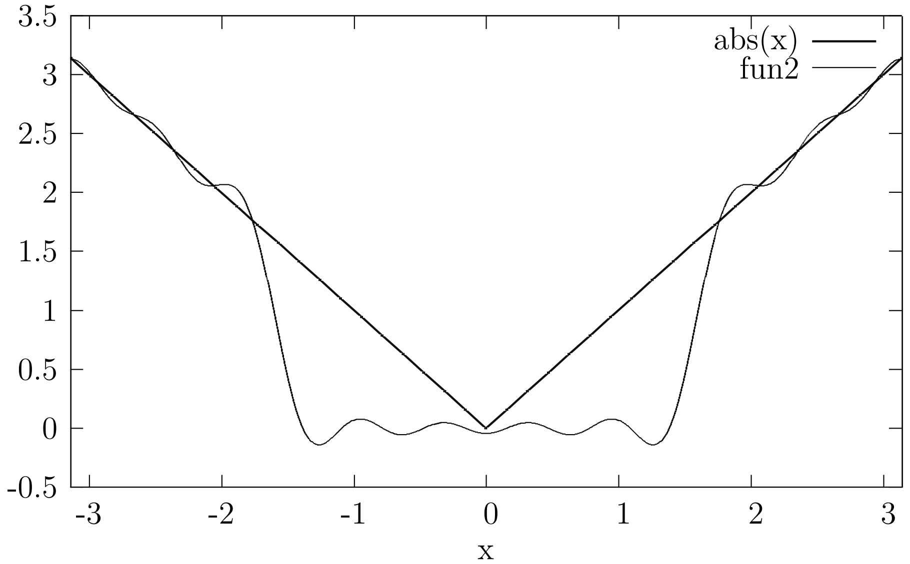
1. Buď $f(x) = \sin(2x)$ pro $x \in (3\pi/4, \pi)$ a $f(x) = 0$ pro $x \in (0, 3\pi/4)$. Prodlužte funkci liše na $(-\pi, \pi)$ a poté 2π periodicky. Najděte jeji Fourierovu řadu. Diskutujte: 1) bodovou konvergenci, 2) stejnoměrnou konvergenci, 3) napište Parsevalovu rovnost. Nezapoměňte krátce zmínit, proč jsou splněny předpoklady použitých vět.

Figure 3: Příklad **1**-částečný součet F. řady pro $n = 10$



2. Buď $f(x) = x$ pro $x \in (\pi/2, \pi)$ a $f(x) = 0$ pro $x \in (0, \pi/2)$. Prodlužte funkci sudě na $(-\pi, \pi)$ a poté 2π periodicky. Najděte jeji Fourierovu řadu. Diskutujte: 1) bodovou konvergenci, 2) stejnoměrnou konvergenci, 3) napište Parsevalovu rovnost. Nezapoměňte krátce zmínit, proč jsou splněny předpoklady použitých vět.

Figure 4: Příklad **2**-částečný součet F. řady pro $n = 10$



Výsledky a návody: **1.** Fourierova řada je
$\mathcal{F}_f(x) = \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1,k\neq 2}^{+\infty}\left(\frac{\sin(3\pi(k+2)/4)}{k+2} - \frac{\sin(3\pi(k-2)/4)}{k-2}\right)\sin(kx)$. Bodová konvergence: $\mathcal{F}_f(x) = \sin(2x)$ pro $x \in [-\pi, -3\pi/4) \cup (3\pi/4, \pi)$, $= 0$ pro $x \in (-3\pi/4, 3\pi/4)$, $\mathcal{F}_f(-3\pi/4) = 1/2$ a $\mathcal{F}_f(3\pi/4) = -1/2$. Jsou splněny předpoklady věty o konvergenci-f je po částech C^1 na $(0, \pi)$. Navíc je f spojitá na $[-\pi, \pi] \setminus \{-3\pi/4, 3\pi/4\}$, její F. řada k ní zde konverguje lokálně stejnoměrně. Protože $f \in L^2(-\pi, \pi)$

platí Parsevalova rovnost. Má tvar: $\frac{1}{4} = \frac{1}{\pi}\|f\|_2^2 = \frac{1}{16} + \frac{1}{\pi^2}\sum_{k=1,k\neq 2}^{+\infty}\left(\frac{\sin(3\pi(k+2)/4)}{k+2} - \frac{\sin(3\pi(k-2)/4)}{k-2}\right)^2$.
2. Fourierova řada je
$\mathcal{F}_f(x) = \frac{3\pi}{8} + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(-\frac{\sin(k\pi/2)}{k} + \frac{2}{\pi k^2}(\cos(k\pi) - \cos(k\pi/2))\right)\cos(kx)$. Bodová konvergence: $\mathcal{F}_f(x) = |x|$ pro $x \in [-\pi, -\pi/2) \cup (\pi/2, \pi)$, $= 0$ pro $x \in (-\pi/2, \pi/2)$, $\mathcal{F}_f(-\pi/2) = \pi/4$ a $\mathcal{F}_f(\pi/2) = \pi/4$. Jsou splněny předpoklady věty o konvergenci-f je po částech C^1 na $(0, \pi)$. Navíc je f spojitá na $[-\pi, \pi] \setminus \{-\pi/2, \pi/2\}$, její F. řada k ní zde konverguje lokálně stejnoměrně. Protože $f \in L^2(-\pi, \pi)$ platí Parsevalova rovnost. Má tvar: $\frac{7\pi^2}{12} = \frac{1}{\pi}\|f\|_2^2 = \frac{9\pi^2}{32} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(-\frac{\sin(k\pi/2)}{k} + \frac{2}{\pi k^2}(\cos(k\pi) - \cos(k\pi/2))\right)^2$.

– –

Komplexní čísla

Příklady na cvičení

Cvičení na komplexní čísla.

A. Dokažte ($z, w \in \mathbb{C}$): **1.** $\operatorname{Re}(z \pm w) = \operatorname{Re} z \pm \operatorname{Re} w$ **2.** $\operatorname{Im}(z \pm w) = \operatorname{Im} z \pm \operatorname{Im} w$ **3.** $\overline{z \pm w} = \overline{z} \pm \overline{w}$ **4.** $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$ **5.** $\overline{1/z} = 1/\overline{z}$ **6.** $|z + w| \leq |z| + |w|$ **7.** $|z + w| \geq |z| - |w|$ **8.** $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$ **9.** $z + \overline{z} = 2 \operatorname{Re} z$ **10.** $z - \overline{z} = 2i \operatorname{Im} z$

B. U funkcí $f(z) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ zkoumejte: periodicitu, obor hodnot. Na co se zobrazí svislé/vodorovné přímky v $\mathbb{C}$? **11.** $f(z) = \exp z$ **12.** $f(z) = \sin z$ (návod: $\sin(x + iy) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$) **13.** $f(z) = \cos z$ **14.** $f(z) = 1/z$

C. Pomocí Cauchy-Riemannových podmínek vyšetřete holomorfnost funkcí: **15.** $f(z) = z^2$ **16.** $f(z) = \sin z$ **17.** $f(z) = \exp z$ **18.** $f(z) = \frac{1}{z}$ **19.** $f(z) = \operatorname{Im} z$ **20.** $f(z) = \overline{z}$ **21.** $f(z) = |z|^2$ **22.** $f(z) = \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z$

D. Najděte obecné mocniny: **23.** $m_{1/n}(1)$, kde $n \in \mathbb{N}$ **24.** $m_i i$ **25.** $m_n(a)$, kde $a \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ **26.** $m_{\sqrt{2}}(-1)$

Výsledky a návody:

– –

Komplexní čísla

Příklady na cvičení

A. Napište jako součet mocninné řady o daném středu: **1.** $f(z) = \cosh^2 z$, $z = 0$ **2.** $f(z) = \sin^2 z$, $z = 0$ **3.** $f(z) = \frac{1}{az+b}$, $z = 0$, $b \neq 0$ **4.** $f(z) = \frac{z}{z^2-2z+5}$, $z = 1$ **5.** $f(z) = \sin(2z - z^2)$, $z = 1$ **6.** * $f(z) = \exp z \sin z$, $z = 0$ **7.** * $f(z) = \exp\left(\frac{z}{1-z}\right)$, $z = 0$

B. Rozviňte do Laurentovy řady o daném středu: **8.** $f(z) = \frac{1}{(z-a)(z-b)}$, $z = a$ **9.** $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^2}$, $z = i$ **10.** $f(z) = (z+1)^2 \exp(1/z)$, $z = 0$ **11.** $f(z) = z^2 \sin\left(\frac{1}{z-1}\right)$, $z = 1$ **12.** * $f(z) = \sin z \sin(1/z)$, $z = 0$ **13.** * $f(z) = \exp(z + 1/z)$, $z = 0$ U příkladů * stačí nalézt část řady, jinak se žádá tvar celé sumy.

C. Přímo z definice spočítejte křivkové integrály: **14.** $\int_\varphi |z|\, dz$, φ je úsečka od 0 do $2+i$. **15.** $\int_\varphi \mathrm{Re}(z)\,\mathrm{Im}(z)\, dz$, φ je část kružnice $\{|z| = \sqrt{2}\} \cap \{\mathrm{Re}(z) \leq 0\} \cap \{\mathrm{Im}(z) \leq 0\}$, proběhnutá ve směru hodinových ručiček. **16.** $\int_C z/\overline{z}\, dz$, C je křivka $\{|z| = \sqrt{3}\} \cap \{\mathrm{Im}(z) \leq 0\}$, proběhnutá proti směru hodinových ručiček. **17.** $\int_C 1/z\, dz$, C je trojúhelník s vrcholy 1, 2 a i, orientovaný kladně.

D. Spočtěte integrály: **18.** $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\, dx}{(x^2+4x+13)^2}$ **19.** $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}\, dx$ **20.** $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$ **21.** $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^n}$ **22.** $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2+a^2)^3}\, dx$ **23.** $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x^3+5x)\sin x}{x^4+10x^2+9}\, dx$ **24.** $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x \sin x}{(x^2+a^2)^2}\, dx$ **25.** $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-1)\cos x}{x^2-4x+5}$ **26.** $\int\limits_{0}^{\pi} \frac{\cos^2 x}{1-a\sin^2 x}\, dx$, $a \in (0,1)$ **27.** $\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{dx}{(a+b\cos^2 x)^2}$, a, $b > 0$ **28.** $\int\limits_{0}^{\pi} \frac{\cos^4 x}{1+\sin^2 x}\, dx$ **29.** $\int\limits_{0}^{\pi} \frac{\sin(kx)}{\sin x}\, dx$, $k \in \mathbb{N}$ Integrály chápejte jako Newtonovy.

Výsledky a návody:

Komplexní čísla

Příklady na cvičení

A. Spočítejte integrály **1.** $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\,dx}{(x^2+4x+13)^2}$ **2.** $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx$ **3.** $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$ **4.** $*\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^n}$

5. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2\,dx}{(x^2+1)(x^2+9)}$ **6.** $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9}\,dx$ **7.** $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2-2ix-2}$ **8.** $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3}$ **9.** $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2\,dx}{x^4+6x^2+25}$ **10.** $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x^6\,dx}{(x^4+a^4)^2}$

11. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x^4\,dx}{(a+bx^2)^4}$ **12.** $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)^2}$ **13.** $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x^4+1}{x^6+1}\,dx$ **14.** $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2\,dx}{(x^2+4ix-5)^2}$

B. Spočítejte integrály: **15.** $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2+a^2)^3}\,dx$ **16.** $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x^3+5x)\sin x}{x^4+10x^2+9}\,dx$ **17.** $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x\sin x}{(x^2+a^2)^2}\,dx$ **18.** $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-1)\cos x}{x^2-4x+5}$

19. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{1-\cos ax}{x^2}\,dx$ **20.** $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\sin ax}{x(x^2+b^2)}$ **21.** $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x^2-b^2}{x^2+b^2}\frac{\sin ax}{x}\,dx$ **22.** $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x-\sin x}{x^3(x^2+a^2)}\,dx$ **23.** $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x\,dx}{x^2-\pi^2/4}$

24. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x\,dx}{x(x-3\pi)}$

C. Spočítejte integrály: **25.** $\int\limits_{0}^{\pi} \frac{\cos^2 x}{1-a\sin^2 x}\,dx\,,\quad a\in(0,1)$ **26.** $\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{dx}{(a+b\cos^2 x)^2}\,,\quad a,b>0$ **27.** $\int\limits_{0}^{\pi} \frac{\cos^4 x}{1+\sin^2 x}\,dx$

28. $\int\limits_{0}^{\pi} \frac{\sin(kx)}{\sin x}\,dx,\ k\in\mathbb{N}$ **29.** $\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{dx}{5+3\cos x}$ **30.** $\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{\cos^2 x\,dx}{13+12\cos x}$ **31.** $\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{dx}{13+12\sin x}$ **32.** $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2 x\,dx}{1-2a\cos x+a^2}\,,\quad a>1$

Výsledky a návody: **1.** $-\pi/27$ **2.** $\pi/\sqrt{2}$ **3.** $\pi/(ab(a+b))$ **4.** $\pi(2n-3)!!/(2^{n-1}(n-1)!)$ **5.** $\pi/4$ **6.** $\frac{5}{12}\pi$ **7.** 0 **8.** $3\pi/8$ **9.** $\pi/4$ **10.** $3\sqrt{2}\pi/(16a)$ **11.** $\pi/(32ab^2\sqrt{ab})$ **12.** $\pi(2b+a)/(2ab^3(a+b)^2)$ **13.** $4\pi/3$ **14.** 0 **15.** $\pi e^{-a}(a^2+3a+3)/(16a^5)$ **16.** $\pi(e^{-1}+e^{-3})/2$ **17.** $\pi e^{-a}/(4a)$ **18.** $-\pi\, e^{-1}(\sin(2)-\cos(2))$ **19.** $a\pi/2$ **20.** $\pi(1-\exp(-ab))/2b^2$ **21.** $\pi(2\exp(-ab)-1)/2$ **22.** $\pi(a^2-2a+2-2e^{-a})/(4a^4)$ **23.** -2 **24.** $-2/3$ **25.** $\pi(1-\sqrt{1-a})/a$ **26.** $\pi(2a^3+5a^2b+4ab^2+b^3)/(2(a+b)^{7/2}a^{3/2})$ **27.** $2\pi(\sqrt{2}-5/4)$ **28.** π pro k liché, 0 pro k sudé **29.** $\pi/2$ **30.** $13\pi/45$ **31.** $2\pi/5$ **32.** π/a^2

– –

Komplexní čísla

Příklady na cvičení

Nalezněte rezidua ve všech singularitách dané funkce. **1.** $f(z) = \frac{1}{z^3+z}$ **2.** $\frac{z^2}{z^4+1}$ **3.** $\frac{z^2}{(z+1)^3}$ **4.** $\frac{1}{(z^2+1)^3}$ **5.** $\frac{1}{(z^2+1)(z-1)^2}$ **6.** $\frac{z^{2n}}{(z-1)^n}$, $n \in \mathbb{N}$ **7.** $\frac{1}{\sin \pi z}$ **8.** $\operatorname{cotg} \pi z$ **9.** $\frac{1}{\sinh z}$ **10.** $\frac{1}{\cosh z}$ **11.** $\tanh z$ **12.** $\frac{\cos z}{(z-1)^2}$ **13.** $\frac{1}{\mathrm{e}^z+1}$ **14.** $\frac{\sin \pi z}{(z-1)^3}$ **15.** $\frac{1}{\sin z^2}$ **16.** $\frac{1}{z^6(z-2)}$ **17.** $\frac{z^8+1}{z^6(z+2)}$ **18.** $\frac{z^{10}+1}{z^6(z^2+4)}$ **19.** $\frac{\cos z}{(z^2+1)^2}$

Výsledky a návody:

– –

Fourierova transformace

Příklady na cvičení

A. Nalezněte Fourierovu transformaci funkcí: **1.** $f(\boldsymbol{x}) = -\chi_{(-1,0)}(\boldsymbol{x}) + \chi_{(0,1)}(\boldsymbol{x})$ **2.** $f(\boldsymbol{x}) = (1+\boldsymbol{x})\chi_{(-1,0)}(\boldsymbol{x})+(1-\boldsymbol{x})\chi_{(0,1)}(\boldsymbol{x})$ **3.** $f(\boldsymbol{x}) = \chi_{(-\pi,\pi)}(\boldsymbol{x})\sin\boldsymbol{x}$ **4.** $f(\boldsymbol{x}) = \chi_{(-\pi/2,\pi/2)}(\boldsymbol{x})\cos\boldsymbol{x}$ **5.** $f(\boldsymbol{x}) = \exp(-a|x|)\cos(bx)$, $a > 0$. Pozn.: $\chi_{(a,b)}(\boldsymbol{x})$ je charakteristická funkce intervalu (a,b).

B. Nalezněte Fourierovu transformaci funkcí: **6.** $f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{x^2+a^2}$, $a > 0$. **7.** $f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{x^2+i}$ **8.** $f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{x^2+x+1}$ **9.** $f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{x+i}$ a potažmo $f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(x+i)^n}$ **10.** $f(\boldsymbol{x}) = \frac{x}{(x-i)^2}$ **11.** $f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{x^2+4ix-3}$ Návod: integrujte funkci $\exp(2\pi i\xi z)f(z)$ přes horní ($\xi < 0$) a dolní (pokud $\xi > 0$) polokružnici o středu 0 a poloměru R. Užijte reziduovou větu a limitní přechod $R \to \infty$.

C. Nalezněte Fourierovu transformaci funkcí: **12.** $f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{e^x+e^{-x}}$ **13.** $f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{e^x+e^{-x}+2}$ **14.** $f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{e^x+e^{1-x}+e+1}$ **15.** $f(\boldsymbol{x}) = \frac{e^x}{e^{2x}+4}$

Návod: integrujte funkci $\exp(2\pi i\xi z)f(z)$ přes obdélník s vrcholy $R, R+2\pi i, -R+2\pi i, -R$. Užijte reziduovou větu a limitní přechod $R \to \infty$.

D. Nalezněte Fourierovu transformaci funkcí: **16.** $f(\boldsymbol{x}) = \chi_{(-1,1)}(\boldsymbol{x})$ a s její pomocí $f(x) = \chi_{(a,b)}(\boldsymbol{x})$, $a < b$. **17.** $f(\boldsymbol{x}) = \exp(-ax^2)$ a $f(x) = x\exp(-ax^2)$. (Užijte faktu $\boldsymbol{F}[\exp(-\pi x^2)](\xi) = \exp(-\pi\xi^2)$ a Věty 23.1.(5), 23.4.(2).)
