21. Abstraktní Fourierovy řady.

Opakování. Vektorový prostor X je množina, jejíž prvky lze sčítat, násobit skalárem (typicky z $\mathbb{C}$), a obsahuje prvek $\mathbf{0}$ (nulový vektor.)
Norma je přiřazení $x \mapsto \|x\|$, splňující:

1. $\|x\| \geq 0$, a $\|x\| = 0$ právě když $x = \mathbf{0}$
2. $\|ax\| = |a|\|x\|$ pro $\forall a \in \mathbb{C}$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (trojúhelníková nerovnost)

Definice. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená. Pro $p \in [1, \infty)$ definujeme

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{C} : \ f \text{ je měřitelná, } \int_\Omega |f(x)|^p \, dx < \infty \right\}$$

respektive pro $p = \infty$

$$L^\infty(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{C} : \ f \text{ je měřitelná a } \exists C \text{ tak, že } |f(x)| \leq C \text{ s.v. v } \Omega \ \right\}$$

Terminologie: funkce L^p-integrovatelné resp. esenciálně omezené.
Norma na prostoru $L^p(\Omega)$ se definuje pro $p < \infty$ jako

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left\{ \int_\Omega |f(x)|^p \, dx \right\}^{1/p}$$

respektive pro $p = \infty$ jako

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf \left\{ C > 0 : \ |f(x)| \leq C \text{ s.v. v } \Omega \right\}$$

Poznámka. Obecně $\|f\|_{L^p(\Omega)} = 0$ implikuje jen $f = 0$ s.v. a nikoliv $f = 0$. Řešení: v prostorech L^p považuji funkce, které se rovnají skoro všude, za totožné. (Například Dirichletovu funkci a funkci nulovou.)
Důsledek: nemá smysl hovořit o takových vlastnostech funkce z L^p, které se změní, změním-li funkci na množině míry nula (například hodnota v jednom bodě.) Má smysl hovořit jen o takových vlastnostech, které na takové změně nezáleží (například integrál přes měřitelnou množinu, speciálně norma).

Lemma 21.1. [Youngova nerovnost.] Nechť a, $b \geq 0$ a nechť $1 < p$, $q < \infty$ splňují $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Potom $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$.

Poznámka. Speciálně pro $p = q = 2$: $ab \leq a^2/2 + b^2/2$.

Lemma 21.2. [Hölderova nerovnost.] Nechť $u(x)$, $v(x) : \Omega \to \mathbb{R}^*$ jsou měřitelné, nechť p, $q \in (1,\infty)$ splňují $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Potom

$$\int_\Omega |u(x)v(x)|dx \leq \Big(\int_\Omega |u(x)|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\int_\Omega |u(x)|^q dx\Big)^{\frac{1}{q}}.$$

(S úmluvou $0\cdot\infty = 0$.)

Lemma 21.3. [Minkowského nerovnost.] Pro $p \in (1,\infty)$ a f, $g : \Omega \to \mathbb{R}^*$ měřitelné je

$$\Big(\int_\Omega |f(x)+g(x)|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}} \leq \Big(\int_\Omega |f(x)|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\int_\Omega |g(x)|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Důsledek. Trojúhelníková nerovnost pro normu v $L^p(\Omega)$.

Poznámky. ① Lze dokázat, že $L^p(\Omega)$ je úplný prostor. Viz Jarník: Integrální počet II, Věta 199, s. 545., nebo Lukeš, Malý: Míra a integrál, odstavec 10.6.
② Důsledkem důkazu předchozího tvrzení je fakt, že je-li $f_n \to f$ v $L^p(\Omega)$, lze z $\{f_n\}$ vybrat podposloupnost $\{f_{n_k}\}$, že $f_{n_k} \to f$ s.v. Ω pro $k \to +\infty$.
② Další důležité tvrzení je hustota $C_c^\infty(\Omega)$ v $L^p(\Omega)$:

$$\big(\forall \varepsilon > 0\big)\big(\forall f \in L^p(\Omega)\big)\big(\exists g \in C_c^\infty(\Omega)\big)\Big[\|f-g\|_{L^p(\Omega)} < \varepsilon\Big].$$

(Platí pouze pro $p < \infty$.) Viz. Kopáček: Matematická analýza pro fyziky III, Věta 13.37 pro $L^2(\Omega)$, podobný důkaz funguje in pro $L^p(\Omega)$, $p < +\infty$. Proč nemůže tvrzení platit pro $p = +\infty$?

Opakování. Nechť $(X, \|\cdot\|)$ je normovaný vektorový prostor. Pomocí normy definujeme konvergenci posloupnosti

$$x_n \to x_0 \text{ v } X \qquad \text{právě když} \qquad \|x_n - x_0\| \to 0.$$

Analogicky konvergenci řady: $\sum_{k=1}^\infty x_k = s$ (kde x_k, $s \in X$), právě když $s_n \to s$, kde $s_n = \sum_{k=1}^n x_k$.

Definice. Posloupnost x_n se nazve cauchyovská, jestliže

$$\big(\forall \varepsilon > 0\big)\big(\exists n_0 \in \mathbb{N}\big)\big[m, n \geq n_0 \implies \|x_n - x_m\| < \varepsilon\big].$$

Prostor, ve kterém cauchyovská posloupnost je vždy konvergentní (tj. má limitu) se nazývá úplný. Normovaný vektorový prostor, který je úplný, se nazývá Banachův prostor.

Příklady. $\mathbb{R}^n$ (s eukleidovskou normou) je Banachův prostor – úplnost byla dokázána dokázána loni v přednášce nMAF052. Výše definované prostory $L^p(\Omega)$ jsou Banachovy.

Věta 21.1. Nechť X je Banachův prostor, $x_k \in X$. Jestliže $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|$ konverguje, pak také řada $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ konverguje. (Absolutní konvergence implikuje konvergenci.)

Opakování. Skalární součin je přiřazení $x,\, y \mapsto \langle x, y\rangle$, splňující:

1. přiřazení $x \mapsto \langle x, y\rangle$ je lineární (při y pevném)
2. $\langle y, x\rangle = \overline{\langle x, y\rangle}$
3. $\langle x, x\rangle \geq 0$, a $\langle x, x\rangle = 0$ právě když $x = \mathbf{0}$.

Poznámky.
• Z 1., 2. plyne: $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$, $\langle x, y + z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$, a $\langle ax, y\rangle = a\langle x, y\rangle$, $\langle x, ay\rangle = \overline{a}\langle x, y\rangle$.

• (důležité) skalární součin vždy vytváří normu předpisem $\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle}$. Platí tzv. Cauchy-Schwartzova nerovnost

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|\,.$$

Definice. Prostor se skalárním součinem, který je úplný (vzhledem k normě, vytvořené skalárním součinem), se nazývá Hilbertův prostor.

Úmluva. V dalším značí H Hilbertův prostor. Tj. prostor se skálárním součinem, který uvažujeme automaticky s normou $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$, a který je úplný.

Příklad. Prostor $L^2(\Omega)$ se skalárním součinem

$$\langle f, g\rangle := \int_\Omega f(x)\overline{g(x)}\, dx$$

je Hilbertův prostor. (Samozřejme $\mathbb{R}^n$ je Hilbertův, ale nás budou nadále zajímat nekonečně-dimenzionální případy.)

Lemma 21.4.

1. přiřazení $x \mapsto \|x\|$ je spojité
2. přiřazení $x,\, y \mapsto \langle x, y\rangle$ je spojité

Definice. Řekneme, že $\{x_n\} \subset H$ tvoří ortogonální (OG) systém, jestliže $x_n \neq \mathbf{0}$, a $\langle x_n, x_m\rangle = 0$ pro $m \neq n$. Systém se nazve ortonormální, pokud navíc $\|x_n\| = 1$ pro $\forall n$.

Definice. Trigonometrický systém je systém funkcí

$$\big\{1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \dots\big\}.$$

Lemma 2.5 Trigonometrický systém je OG v prostoru $L^2(0, 2\pi)$.
Z ortogonálního systému vznikne ortonormální, klademe-li $\tilde{x}_n = x_n/\|x_n\|$. ON trigonometrický systém je

$$\Big\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \dots\Big\}.$$

Klíčová otázka kapitoly. Je dán nějaký OG systém $\{x_n\} \subset H$, a my se ptáme, zda každý prvek $x \in H$ lze vyjádřit jako $\sum_{k=1}^{\infty} c_k x_k$.

Věta 21.2. Nechť $\{x_n\} \subset H$ je OG systém, $c_k \in \mathbb{C}$, nechť řada $\sum_{k=1}^{\infty} c_k x_k$ konverguje a má součet $x \in H$. Potom

$$c_k = \frac{\langle x, x_k\rangle}{\langle x_k, x_k\rangle}. \tag{FK}$$

Definice. Nechť $\mathscr{S} = \{x_n\} \subset H$ je OG systém, a $x \in H$ je libovolné. Řada $\sum_{k=1}^{\infty} c_k x_k$, kde c_k jsou definována v (FK) výše, se nazývá Fourierova řada prvku x vzhledem k systému $\mathscr{S}$.
Značí se $F_{x,\mathscr{S}}$. Čísla c_k se nazývají Fourierovy koeficienty (prvku x vzhledem k systému $\mathscr{S}$.)

Lemma 21.6. Nechť $\mathscr{S} = \{x_n\} \subset H$ je OG systém, $x \in H$ je libovolné, c_k a $F_{x,\mathscr{S}}$ jsou jak řečeno výše, a_k, n libovolné, $T_n = \sum_{k=1}^{n} a_k x_k$. Potom platí:

$$\begin{aligned}\|T_n\|^2 &= \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 \|x_k\|^2\\ \|x - T_n\|^2 &= \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2\|x_k\|^2 + \sum_{k=1}^{n} |c_k - a_k|^2 \|x_k\|^2.\end{aligned}$$

Věta 21.3. Nechť $\mathscr{S} = \{x_n\} \subset H$ je OG systém, $x \in H$ je libovolné, c_k a $F_{x,\mathscr{S}}$ jsou jak řečeno výše. Potom platí:

1. $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \|x_k\|^2 \leq \|x\|^2$ (Besselova nerovnost)

2. řada $F_{x,\mathscr{S}}$ konverguje (ve smyslu normy v H) (spolu s následujícím bodem-Riesz Fisherova věta)

3. $F_{x,\mathscr{S}} = x$ právě tehdy, když v bodě 1. nastává rovnost. (rovnost se nazývá Parsevalova)

4. Buď $T = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$ konvergentní. Pak $\|x - F_{x,\mathscr{S}}\| \leq \|x - T\|$ a rovnost nastane právě když $a_k = c_k$.

5. $\|x - F_{x,\mathscr{S}}\|^2 + \|F_{x,\mathscr{S}}\|^2 = \|x\|^2$ (Pythagorova věta)

Definice. OG systém $\{x_n\} \subset H$ se nazve úplný, pokud platí: je-li $x \in H$ takové, že $\langle x, x_n \rangle = 0$ pro $\forall n$, pak nutně $x = \mathbf{0}$.

Příklady. ① Trigonometrický systém je úplný v $L^2(0, 2\pi)$ (bude později) ② OG systémy probírané na cvičení (Legendreovy, Hermitovy, Čebyševovy polynomy) jsou vesměs úplné v odpovídajících prostorech

Věta 21.4. Nechť H je Hilbertův prostor, $\mathscr{S} = \{x_n\}$ je OG systém. Potom je ekvivalentní:

1. systém $\{x_n\}$ je úplný

2. pro $\forall x \in H$ platí $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \|x_k\|^2 = \|x\|^2$

3. pro $\forall x \in H$ platí $F_{x,\mathscr{S}} = x$

4. $\overline{Lin \mathscr{S}} = H$

Zde c_k, $F_{x,\mathscr{S}}$ jsou Fourierovy koeficienty resp. Fourierova řada pro x vzhledem k systému $\{x_n\}$.

Definice. Nechť X je vektorový prostor. Množina $\{x_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ se nazve (algebraická) báze X, pokud každé $x \in X$ lze jediným způsobem napsat jako *konečný součet* $\sum_{k=1}^{N} c_k x_{\alpha_k}$, kde $c_k \in \mathbb{C}$.
Nechť X je prostor s normou. Spočetná množina $\{x_n\}_{n \in N}$ se nazve Schauderova báze X, pokud každé $x \in X$ lze jediným způsobem napsat jako *součet řady* $\sum_{k=1}^{\infty} c_k x_k$, kde $c_k \in \mathbb{C}$.

Poznámky.
• v konečně-dimenzionálním prostoru je algebraická báze totéž co Schauderova báze; obě báze jsou konečné
• pokud $\dim X = \infty$, je algebraická báze zpravidla nespočetná. Často však existuje Schauderova báze. Prakticky vzato je pohodlnější pracovat s řadou (jakožto spočetnou lineární kombinací), než konečnými součty prvků, které vybírám z nespočetné algebraické báze.

• z Věty 21.4. vyplývá, že úplný OG systém je příkladem Schauderovy báze (jednoznačnost koeficientů plyne z Věty 21.2.) Hovoříme také o Hilbertově bázi prostoru H.
• v H existuje úplný OG systém právě když je H separabilní (existuje spočetná $M \subset H$ tak, že $\overline{M} = H$)

Věta 21.5 (Stone-Weierstrass) Buď $[a, b] \subset \mathbb{R}$ kompaktní interval, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ spojitá, $\epsilon > 0$. Pak existuje polynom P tak, že $\|f - P\|_\infty < \epsilon$.

Důsledek. Polynomy jsou husté v $L^p(a, b)$ je-li $[a, b] \subset \mathbb{R}$ omezený interval a $p \in [1, +\infty)$. Legendre(ovy) polynomy jsou úplný OG systém v $L^2(a, b)$.

22. Fourierovy řady.

Definice. Řada funkcí

$$(T) \qquad \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos kx + b_k \sin kx] ,$$

kde a_k, $b_k \in \mathbb{R}$ jsou konstanty, se nazývá trigonometrická řada.

Poznámka. Pokud tato řada konveguje, je její součet 2π-periodická funkce. Lze naopak každou 2π-periodickou funkci napsat jako součet nějaké trigonometrické řady? – Jedna z hlavních otázek kapitoly.

Poznámka. Lemma 21.5 říká, že tzv. trigonometrický systém

$$\{1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, ...\}$$

je ortogonální vzhledem ke skalárnímu součinu $\langle f, g\rangle = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)\, dx$.

Značení. $f \in L^p_{\mathrm{per}}(0, 2\pi)$ znamená, že f je měřitelná v $\mathbb{R}$, 2π-periodická a $\int_0^{2\pi} |f(x)|^p\, dx < \infty$.

Definice. Nechť $f \in L^1_{\mathrm{per}}(0, 2\pi)$. Trigonometrická řada s koeficienty

$$(FK) \qquad \begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, dx \\ a_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx\, dx \qquad k \geq 1 \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx\, dx \qquad k \geq 1 \end{aligned}$$

se nazývá Fourierova řada funkce f. Značí se $\mathcal{F}_f$. Její n-tý částečný součet značíme

$$\mathcal{F}_{f,n}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left[a_k \cos kx + b_k \sin kx\right] .$$

Je tedy $\mathcal{F}_f(x) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{F}_{f,n}(x)$. Čísla a_k, b_k se nazývají Fourierovy koeficienty funkce f.

Poznámka. Nechť řada (T) konverguje stejnoměrně v $[0, 2\pi]$. Označme $f(x)$ její součet. Potom čísla a_k, b_k lze vypočíst podle vzorců (FK) výše, viz Věta 21.2. Jedná se o Fourierovu řadu funkce $f \in L^2(0, 2\pi)$ vzhledem k trigonometrickému systému.

Poznámky.
• je $\mathcal{F}_f(x) = f(x)$? Jistě ne vždy ve všech bodech – je-li $f = 0$ s.v., pak $a_k = b_k = 0$ a tedy nutně $\mathcal{F}_f \equiv 0$. Obecně, a_k, b_k a tudíž $\mathcal{F}_f$,,nevidí" změny f na množině míry 0. Viz též poznámku níže.
• $\mathcal{F}_f$ je vždy 2π-periodická, zkoumanou f tedy také rozšíříme 2π-periodicky.
• je-li f funkce 2π-periodická, potom $\int_0^{2\pi} f = \int_{-\pi}^{\pi} f = \int_a^{a+2\pi} f$ pro $\forall a \in R$
• obecněji, pro f funkci l-periodickou definujeme

$$\mathcal{F}_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos\left(\frac{2\pi}{l} kx\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi}{l} kx\right) \right]$$

kde

$$a_k = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos\left(\frac{2\pi}{l} kx\right) \, dx \,, \quad b_k = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin\left(\frac{2\pi}{l} kx\right) \, dx \,.$$

(Platí příslušné analogie výsledků této kapitoly.)
• f sudá $\implies b_k = 0$; f lichá $\implies a_k = 0$.

Poznámka. Nechť $f(x)$ je 2π-periodická funkce, $\mathcal{F}_f(x)$ její Fourierova řada. Ohledně (ne)nastávání rovnosti

$$(*) \qquad \mathcal{F}_f(x) = f(x)$$

je známo toto:

- lze sestrojit $f \in L^1(0, 2\pi)$ takovou, že (*) neplatí pro vůbec žádné x.
- pokud $f \in L^2(0, 2\pi)$, tak (*) platí pro skoro všechna x. Slavný výsledek L. Carlesona z roku 1965; nejkratší známý důkaz nejde pod 30 stran.
- Ve Větě 22.1 dokážeme, že trignometrický systém je báze $L^2(0, 2\pi)$. Z kapitoly 21 poté plyne, že pokud $f \in L^2(0, 2\pi)$ tak $\mathcal{F}_{f,n} \to f$ in $L^2(0, 2\pi)$. Z toho ovšem plyne pouze, že existuje vybraná podposloupnost $\mathcal{F}_{f,n_k}$, která konverguje k f s.v. v $(0, 2\pi)$.

- pokud f je spojitá, stále mohou existovat body (dokonce nekonečně bodů) takové, že (*) neplatí.

  Ovšem spojitá funkce je omezená, tudíž L^2-integrovatelná, a tedy díky Carlesonově větě nastává (*) pro skoro všechna x.

- pokud f je spojitá, a f' je po částech spojitá, tak (*) platí pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Toto jediné tvrzení jsme poctivě dokázali.

Lemma 22.4.[1] [Riemann-Lebesgueovo.] Nechť $f \in L^1(a,b)$. Potom

$$\lim_{t\to\infty} \int_\alpha^\beta f(x)\sin(tx)\,dx = 0\,, \qquad \lim_{t\to\infty} \int_\alpha^\beta f(x)\cos(tx)\,dx = 0\,.$$

kde $(\alpha,\beta) \subset (a,b)$ je libovolný interval.

Důsledek.
• Platí $a_k, b_k \to 0$ pro $k \to +\infty$.
• Pro $f \in L^1(0,2\pi)$ je splněna nutná podmínka st. konvergence Fourierovy řady $\mathcal{F}_f$.

Definice. Funkci f nazveme po částech spojitou v (a,b), pokud existují body $x_0 = a < x_1 < x_2 \dots < x_n = b$ takové, že f je spojitá v intervalech (x_{j-1}, x_j) a navíc má v bodech x_j jednostranné vlastní limity. (Definice povoluje, že f není definována v bodech x_j.)
Funkci nazveme po částech C^N, jsou-li funkce f, f', …, $f^{(N)}$ po částech spojité.

Příklady. ① $\operatorname{sgn}(x)$ je po částech C^1, není spojitá
② $|x|$ je spojitá, je po částech C^1, není C^1
③ $\sqrt[3]{x}$ je spojitá, není po částech C^1 (derivace je nespojitá v $x = 0$, nemá zde konečné limity.)

Poznámka. Z naší definice vyplývá, že funkce po částech spojitá je nutně omezená. Proto například $f(x) = 1/(1-|x|)$ je sice spojitá, leč není po částech spojitá v $(-1,1)$.

Věta 22.2. [O konvergenci Fourierovy řady.] Nechť $f \in L^1_{\mathrm{per}}(0,2\pi)$ a navíc f je po částech C^1 v intervalu $(a,b) \subset \mathbb{R}$. Potom pro $\forall x \in (a,b)$ je

$$\mathcal{F}_f(x) = \frac{f(x-) + f(x+)}{2}\,.$$

Speciálně $\mathcal{F}_f(x) = f(x)$ v těch bodech $x \in (a,b)$, kde je $f(x)$ spojitá.

[1] Důkaz pro po částech spojité funkce.

Je-li navíc f spojitá na (a,b), pak $\mathcal{F}_{f,n} \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} f$ na (a,b) pro $n \to +\infty$.

Poznámka. Z Věty 22.1 a hustoty $C(0,2\pi)$ v $L^2(0,2\pi)$ plyne, že trigonometrický systém je báze prostoru $L^2(0,2\pi)$.

Poznámka.[Parsevalova rovnost.] Nechť $f \in L^2_{\text{per}}(0,2\pi)$, nechť $\mathcal{F}_{f,n}(x)$ je částečný součet Fourierovy řady, a_k, b_k Fourierovy koeficienty. Potom platí:
(1)

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} |\mathcal{F}_{f,n}(x) - f(x)|^2 \, dx = 0\,;$$

(2)

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k^2 + b_k^2\right) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 \, dx\,.$$

Poznámky.
• (1) říká, že $\mathcal{F}_{f,n} \to f$ v prostoru $L^2(0,2\pi)$
• (2) lze chápat jako Pythagorovu větu: (PS) = velikost f (v normě L^2) na druhou, (LS) = součet druhých mocnin souřadnic f (a_k, b_k jako souřadnice vzhledem ke trigonometrickému systému)
• pro obecnou periodu ℓ má Parsevalova rovnost tvar

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k^2 + b_k^2\right) = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} |f(x)|^2 \, dx$$

Lemma 22.2. [Komplexní tvar Fourierovy řady.] Nechť $f \in L^1_{\text{per}}(0,2\pi)$, nechť a_k, b_k jsou její Fourierovy koeficienty. Označme

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \exp(-ikx) \, dx\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,.$$

Potom platí vztahy

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{a_0}{2} \\ c_k &= \frac{1}{2}(a_k - ib_k) \quad k \geq 1 \\ c_{-k} &= \frac{1}{2}(a_k + ib_k) \quad k \geq 1 \end{aligned}$$

respektive

$$\begin{aligned} a_0 &= 2c_0 \\ a_k &= c_k + c_{-k} \qquad k \geq 1 \\ b_k &= i(c_k - c_{-k}) \qquad k \geq 1 \end{aligned}$$

Pro n-tý částečný součet Fourierovy řady $\mathcal{F}_{f,n}(x)$ platí

$$\mathcal{F}_{f,n}(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k \exp(ikx)\,,$$

a tedy (formálně)

$$\mathcal{F}_f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \exp(ikx)\,.$$

Lemma 22.3. [Integrální tvar F.ř.] Nechť $f \in L^1_{\mathrm{per}}(0,2\pi)$. Potom n-tý částečný součet F.ř. funkce f splňuje

$$\mathcal{F}_{f,n}(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+z)D_n(z)\,dz$$

kde

$$D_n(z) = \frac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)z\right]}{2\sin\left(\frac{z}{2}\right)}$$

se nazývá Dirichletovo integrační jádro.

Poznámky.
- $D_n(z)$ je sudá, C^∞, 2π-periodická funkce.
- $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(z)\,dz = 1$ pro $\forall n \in \mathbb{N}$.

Věta 22.3. [Riemannova věta o lokalizaci.] Nechť $f \in L^1_{\mathrm{per}}(0,2\pi)$; $A \in R$, $x \in \mathbb{R}$ a $\delta \in (0,\pi)$ jsou pevná čísla. Potom je ekvivalentní:

1. $\mathcal{F}_f(x) = A$
2. $$\int_0^{\delta} \Big\{f(x+z) + f(x-z) - 2A\Big\}\, D_n(z)\,dz \to 0 \qquad \text{pro } n \to \infty\,.$$

Důsledek. O tom, čemu se rovná $\mathcal{F}_f(x)$, rozhoduje pouze chování f na $(x-\delta, x+\delta)$, kde $\delta > 0$ je pevně zvolené číslo (může být velmi malé.)

Opakování.
<u>Věta 15.13.</u> $f_k(x)$ spojité, $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ konverguje stejnoměrně $\Longrightarrow$ $s(x) := \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ je spojitá
<u>Věta 15.9. (Weierstrass)</u> $|f_k(x)| \le c_k$ (čísla c_k nezávisí na x), $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ konverguje $\Longrightarrow$ $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ konverguje stejnoměrně

Věta 15.15. $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ konverguje, $f_k(x)$ jsou diferencovatelné, $\sum_{k=1}^{\infty} f_k'(x)$ konverguje stejnoměrně $\implies$ $s(x) := \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ je diferencovatelná, a $s'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k'(x)$

Věta 22.5. Nechť

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos kx + b_k \sin kx] \ ,$$

a existují $C > 0$, $N \geq 0$ celé tak, že platí

$$|a_k| + |b_k| \leq \frac{C}{k^{N+2}} \ .$$

Potom $f \in C^N(\mathbb{R})$.

Věta 22.6. Nechť $f \in C^N(\mathbb{R})$ je 2π-periodická, nechť navíc $f^{(N+1)}$, $f^{(N+2)}$ jsou po částech spojité. Potom pro Fourierovy koeficienty platí

$$|a_k| + |b_k| \leq \frac{C}{k^{N+2}} \ .$$

Důsledek. Vidíme, že hladkost funkce je přímo úměrná tomu, jak rychle Fouerierovy koeficienty klesají do nuly.
Z předchozích vět vyplývá, že pro funkce s po částech spojitými derivacemi platí $f \in C^N \setminus C^{N+1} \iff$ Fourierovy koeficienty splňují $|a_k|+|b_k| \sim 1/k^{N+2}$. Pro funkci, která je po částech spojitá, ale není spojitá, platí $|a_k|+|b_k| \sim 1/k$.

Věta 22.7. [Integrování Fourierovy řady člen po členu.] Nechť f je po částech spojitá, 2π-periodická, nechť a_k, b_k jsou její Fourierovy koeficienty. Potom pro $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\int_0^x f(t)\,dt - \frac{a_0}{2}x = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{-b_k}{k} \cos kx + \frac{a_k}{k} \sin kx\right]$$

kde $A_0 = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k}$.

Poznámka. Tvrzení dostaneme formálně integrováním rovnosti

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos kx + b_k \sin kx] \ ,$$

ta ovšem za předpokladů věty nemusí platit!

Důsledek. Nechť $f(x)$ je spojitá, 2π-periodická funkce. Nechť všechny její Fourierovy koeficienty jsou nulové. Potom $f(x)$ je identicky nulová v $\mathbb{R}$.

23. Funkce komplexní proměnné.

Definice.

$$\mathbb{C} = \{z = x + iy : \ x, y \in \mathbb{R}\}$$

kde $i^2 = -1$ (imaginární jednotka), $\operatorname{Re} z = x$ (reálná část), $\operatorname{Im} z = y$ (imaginární část), $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ (absolutní hodnota), $\overline{z} = x - iy$ (číslo komplexně sdružené).
Poznámka. Ztotožnění: $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, $z = x + iy \leftrightarrow (x, y)$. Shoduje se i $|z| = \|(x, y)\|_2$.
Definice. $\mathbb{S} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Terminologie: $\mathbb{C}$ … otevřená Gaussova rovina, $\mathbb{S}$ … uzavřená Gaussova rovina alias Riemannova sféra, ∞...komplexní nekonečno. Okolí bodu ($z_0 \in \mathbb{C}$, $\varepsilon > 0$, $a \in \mathbb{S}$):

$$\begin{aligned} U(z_0, \varepsilon) &= \{z \in \mathbb{C};\ |z - z_0| < \varepsilon\} \\ U(\infty, \varepsilon) &= \{z \in \mathbb{C};\ |z| > \frac{1}{\varepsilon}\} \cup \{\infty\} \\ P(a, \varepsilon) &= U(a, \varepsilon) \setminus \{a\} \end{aligned}$$

Početní pravidla:
- $a \pm \infty = \infty$ pro $\forall a \in \mathbb{C}$
- $a \cdot \infty = \infty$ pro $\forall a \in \mathbb{S} \setminus \{0\}$
- $a/\infty = 0$ pro $\forall a \in \mathbb{C}$
- $\boxed{a/0 = \infty}$ pro $\forall a \in \mathbb{S} \setminus \{0\}$

Nedefinováno zůstává: $0 \cdot \infty$, $0/0$, ∞/∞, $\infty \pm \infty$.

Příklady. [Funkce komplexní proměnné.]
- polynomy, racionální funkce.
- e^z, $\sin z$, $\cos z$ - definovány mocinnou řadou, která (absolutně) konverguje pro $\forall z \in \mathbb{C}$. Klíčový vztah:

$$\exp(a + ib) = \exp(a)[\cos b + i \sin b]$$

Definice. Pro $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ definujeme

$$\begin{aligned} \log z &= \{\zeta \in \mathbb{C} : \ \exp \zeta = z\} \\ \arg z &= \{\beta \in \mathbb{R} : \ z = |z| \exp(i\beta)\} \\ \operatorname{Log} z &= \{\zeta \in \log z : \ \operatorname{Im}(\zeta) \in (-\pi, \pi]\} \\ \operatorname{Arg} z &= \{\beta \in \arg z : \ \beta \in (-\pi, \pi]\} \end{aligned}$$

Poznámky.
- log, arg nejsou to funkce v klasickém smyslu: číslu je přiřazena množina.

Např.: $\log 1 = \{2k\pi i : \ k \in \mathbb{Z}\}$.
• Log, Arg funkce jsou: číslu je přiřazeno právě jedno číslo.
• platí vztahy (ln je klasický reálný logaritmus):

$$\zeta \in \log z \iff \operatorname{Re}\zeta = \ln|z| \ \& \ \operatorname{Im}\zeta \in \arg z$$
$$\operatorname{Log} z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z$$

Definice. [Komplexní mocnina.] Pro $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $a \in \mathbb{C}$ definujeme

$$m_a(z) = \Big\{ \exp(a\zeta) : \ \zeta \in \log z \Big\}$$

Definice. Pro $z_0 \in \mathbb{C}$, $f(z) : U(z_0) \to \mathbb{C}$ definujeme

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} .$$

Limitu chápu v $\mathbb{C}$ a musí být vlastní. Ekvivalentní definice: $f'(z_0) = A$ právě když

$$f(z_0 + h) = f(z_0) + Ah + r(h)$$

kde $r(h) = o(|h|)$ pro $h \to 0$.
Značím $f^{(1)}(z) = f'(z)$ a indukcí $f^{(n+1)}(z) = [f^{(n)}(z)]'$.

Věta 23.1. [2] Platí:
(1) $(f \pm g)'(z) = f'(z) \pm g'(z)$
(2) $(fg)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$
(3) $(f/g)'(z) = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g^2(z)}$ pokud $g(z) \neq 0$
(4) $(f_{-1})'(w) = 1/f'(f_{-1}(w))$, je-li $f(z)$ prostá a $f'(z) \neq 0$
(5) $(f \circ g)'(z) = f'(g(z))g'(z)$

Úmluva. Ω je otevřená část $\mathbb{C}$.

Definice. Funkce $f(z) : \Omega \to \mathbb{C}$ se nazve holomorfní v Ω, pokud $f'(z)$ existuje všude v Ω. Značíme $f(z) \in \mathcal{H}(\Omega)$.

Příklady.
• polynom $P(z) \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$
• racionální funkce $R(z) = P(z)/Q(z) \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{z : \ Q(z) = 0\})$
• e^z, $\sin z$, $\cos z \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ (neboť mocninnou řadu lze derivovat člen po členu, viz loňská Věta 11.4.)
• Věta 23.1. $\implies$ sčítáním, odčítáním, násobením, dělením, invertováním a skládáním holomorfních funkcí vzniká funkce holomorfní (na patřičném definičním oboru)

[2] Bez důkazu.

Poznámka. Ztotožnění $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ ... ztotožnění $f(z) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ s funkcí $\boldsymbol{F}(x, y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, kde $z = x + iy$ a $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2) = (\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f)$.

Příklad. $f(z) = z^2$ odpovídá $\boldsymbol{F}(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$.

Věta 23.2. [Cauchy-Riemannovy podmínky.] Nechť $f(z) : U(z_0) \to \mathbb{C}$, $z_0 \in \mathbb{C}$. Nechť $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2)(x, y) : U((x_0, y_0)) \to \mathbb{R}^2$ jí odpovídá dle výše uvedeného ztotožnění, kde $z_0 = x_0 + iy_0$. Potom následující je ekvivalentní:
(1) existuje $f'(z_0)$ (derivace podle komplexní proměnné)
(2) funkce $\boldsymbol{F}$ má v bodě (x_0, y_0) totální diferenciál a navíc v (x_0, y_0) platí tzv. Cauchy-Riemannovy podmínky:

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = \frac{\partial F_2}{\partial y} \qquad \frac{\partial F_2}{\partial x} = -\frac{\partial F_1}{\partial y}$$

Během důkazu také zjistíme, že platí:

$$f'(z_0) = \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} - i \frac{\partial F_2}{\partial x} \right)_{(x_0, y_0)} = -i \left(\frac{\partial F_1}{\partial y} + i \frac{\partial F_2}{\partial y} \right)_{(x_0, y_0)}$$

Poznámky.
• holomorfnost funkce (=existence $f'(z)$) je mnohem restriktivnější, než se zdá na první pohled, a má řadu důsledků.
• funkce $f(z) = \operatorname{Re} z$ není holomorfní: nesplní C.R. podmínky.

Věta 23.3. Nechť $f(z) \in \mathcal{H}(\Omega)$ a $f'(z) \neq 0$ v Ω. Potom systémy křivek $\{\operatorname{Re} f = konst\}$ a $\{\operatorname{Im} f = konst\}$ jsou navzájem ortogonální. Tj., tyto křivky se mohou protínat jen pod pravým úhlem.

Příklad. Je-li $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, pak $\operatorname{Im} f$ a $\operatorname{Re} f$ řeší $\Delta u = 0$ v Ω.

Definice. Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$. Křivkou v Ω nazýváme funkci $\varphi(t) : [a, b] \to \Omega$, která je spojitá, po částech C^1 a $\varphi'(t) \neq 0$ až na konečně výjimek.
Definujeme geometrický obraz křivky $\langle \varphi \rangle = \{\varphi(t);\ t \in [a, b]\}$, počáteční bod p.b. $= \varphi(a)$, koncový bod k.b. $= \varphi(b)$. Křivka je uzavřená, je-li $\varphi(a) = \varphi(b)$. Křivka je jednoduchá, pokud $\varphi(t)$ je prosté na $[a, b]$; jednoduchá uzavřená, pokud $\varphi(a) = \varphi(b)$ a $\varphi(t)$ je prosté na $[a, b)$.
Jednoduchá, uzavřená křivka se nazývá Jordanova.

Definice. Množina $\Omega \subset \mathbb{C}$ se nazve souvislá, jestliže libovolné její dva body lze spojit křivkou, ležící v Ω. Otevřená, souvislá množina se nazývá oblast. Množina Ω je jednoduše souvislá, je-li souvislá a navíc, každá uzavřená křivka se dá spojitě stáhnout do bodu, aniž opustí Ω.

Definice. Nechť φ je křivka. Pro funkci $f(z) : \langle\varphi\rangle \to \mathbb{C}$ definuji křivkový integrál jako

$$\int_\varphi f(z)\,dz = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$$

Dále definuji délku křivky

$$L(\varphi) = \int_a^b |\varphi'(t)|\,dt\,.$$

Poznámky. Integrál komplexní funkce na intervalu, tj. $g(t) : [a,b] \to \mathbb{C}$, definujeme

$$\int_a^b g(t)\,dt := \int_a^b \operatorname{Re} g(t)\,dt + i\int_a^b \operatorname{Im} g(t)\,dt\,.$$

Integrály chápu jako Lebesgueovy, ale v praxi je počítám jako přírustek primitivní funkce: pokud existuje $G(t) : [a,b] \to \mathbb{C}$ taková, že $G'(t) = g(t)$, pak $\int_a^b g(t)\,dt = G(b) - G(a)$.

Lemma 23.1. Nechť $g(t) : [a,b] \to \mathbb{C}$. Potom

$$\Big|\int_a^b g(t)\,dt\Big| \le \int_a^b |g(t)|\,dt\,.$$

Definice. Je-li $\varphi(t) : [a,b] \to \Omega$ křivka, definuji křivku opačnou $\dot{-}\varphi := \chi$, kde $\chi(t) = \varphi(-t)$, $t \in [-b,-a]$.
Jsou-li $\varphi(t) : [a,b] \to \Omega$, $\psi(t) : [c,d] \to \Omega$ křivky, a k.b.φ =p.b.ψ, definujeme součet křivek $\varphi\dot{+}\psi := \chi$, kde $\chi(t) : [a, b+d-c] \to \Omega$ je definována

$$\chi(t) = \begin{cases} \varphi(t), & t \in [a,b] \\ \psi(t+c-b), & t \in [b, b+d-c] \end{cases}$$

Věta 23.5. [Vlastnosti křivkového integrálu v $\mathbb{C}$.] Nechť φ, ψ jsou křivky v Ω, $f(z)$, $g(z) : \Omega \to \mathbb{C}$. Potom

1. $\int_\varphi [f(z) + g(z)]\,dz = \int_\varphi f(z)\,dz + \int_\varphi g(z)\,dz$.
2. $\int_\varphi cf(z)\,dz = c\int_\varphi f(z)\,dz$ pro $\forall c \in \mathbb{C}$.
3. $\int_{\varphi\dot{+}\psi} f(z)\,dz = \int_\varphi f(z)\,dz + \int_\psi f(z)\,dz$.
4. $\int_{\dot{-}\varphi} f(z)\,dz = -\int_\varphi f(z)\,dz$.

5. Je-li $|f(z)| \leq M$ pro $\forall z \in \langle\varphi\rangle$, tak
$$\Big|\int_\varphi f(z)\,dz\Big| \leq ML(\varphi)\,.$$

6. Pokud existuje $F(z) : \Omega \to \mathbb{C}$ taková, že $F'(z) = f(z)$, tak
$$\int_\varphi f(z)\,dz = F(k.b.\varphi) - F(p.b.\varphi)\,.$$

Důležitý příklad. Pro $n \in \mathbb{Z}$, $z_0 \in \mathbb{C}$ a křivku $\varphi(t) = z_0 + r\,\mathrm{e}^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ je
$$\int_\varphi (z - z_0)^n\,dz = \begin{cases} 0 & n \neq -1 \\ 2\pi i & n = -1 \end{cases}$$

Věta 23.6. [Cauchyho věta.] Nechť $f(z) \in \mathcal{H}(\Omega)$, a φ je Jordanova křivka v Ω taková, že $\operatorname{int}\varphi \subset \Omega$. Potom
$$\int_\varphi f(z)\,dz = 0\,.$$

Poznámka. Klíčový je předpoklad, že $\operatorname{int}\varphi \subset \Omega$, neboli φ neobíhá kolem žádné singularity $f(z)$. Pro jednoduše souvislou Ω je vždy splněn.

Lemma 23.2. [O velké půlkružnici.] Nechť $\varphi_R := R\,\mathrm{e}^{it}$, $t \in [0, \pi]$. Nechť $f(z)$ je spojitá v množině $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0,\ |z| > R_0\}$.

1. pokud $|f(z)| \leq K/|z|^2$ pro $|z| > R_0$, tak
$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\varphi_R} f(z)\,dz = 0\,,$$

2. pokud $|f(z)| \leq K/|z|$ pro $|z| > R_0$, tak
$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\varphi_R} f(z)\,\mathrm{e}^{iz}\,dz = 0\,.$$

Poznámka. Předpoklad $|f(z)| \leq K/|z|$ (resp. $|f(z)| \leq K/|z|^2$) je splněn např. pokud $f(z) = P(z)/Q(z)$, kde P, Q jsou polynomy a $\operatorname{st} Q \geq \operatorname{st} P + 1$ (resp. $\operatorname{st} Q \geq \operatorname{st} P + 2$.)

Lemma 23.3. [O malé (půl)kružnici.] Nechť $f(z)$ je spojitá v $P(z_0)$ a nechť $f(z)(z-z_0) \to A \in \mathbb{C}$ pro $z \to z_0$. Nechť $\varphi_r = z_0 + r\,\mathrm{e}^{it}$, $t \in [\alpha, \beta]$. Potom

$$\lim_{r\to 0+} \int_{\varphi_r} f(z)\, dz = iA(\beta - \alpha)\,.$$

Poznámka. Často používaný speciální případ: je-li $g(z)$ spojitá v $U(z_0)$, je

$$\lim_{r\to 0+} \int_{\varphi_r} \frac{g(z)}{z-z_0}\, dz = ig(z_0)(\beta - \alpha)\,.$$

Věta 23.7. [Cauchyho vzorec.] Nechť $f(z) \in \mathcal{H}(\Omega)$, a φ je Jordanova křivka v Ω taková, že $\operatorname{int}\varphi \subset \Omega$. Potom

1. pro $\forall \zeta \in \operatorname{int}\Omega$ je
$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\varphi} \frac{f(z)}{z-\zeta}\, dz\,.$$

2. f je v $\operatorname{int}\varphi$ nekonečněkrát derivovatelná a pro $\forall \zeta \in \operatorname{int}\varphi$ platí
$$f^{(n)}(\zeta) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\varphi} \frac{f(z)}{(z-\zeta)^{n+1}}\, dz\,.$$

Důsledky.
• hodnoty f uvnitř křivky jsou jednoznačně určeny hodnotami f na křivce samé.
• je-li $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ (tj. má první derivaci), je už nutně f nekonečně diferencovatelná v Ω.

Lemma 23.4. Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je oblast (tj. otevřená, souvislá množina), nechť $F(z) : \Omega \to \mathbb{C}$ splňuje $F'(z) = 0$ v Ω. Potom $F(z)$ je konstantní v Ω.

Věta 23.8. [Liouville.] Nechť $f(z)$ je holomorfní a omezená v $\mathbb{C}$. Potom $f(z)$ je konstantní.

Věta 23.9. [Základní věta algebry.] Nechť $P(z)$ je polynom, $\operatorname{st} P \geq 1$. Potom existuje $z_0 \in \mathbb{C}$, $P(z_0) = 0$.

Opakování. Řada

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k \qquad (*)$$

(kde z, z_0, $a_k \in \mathbb{C}$) se nazývá mocninná řada o středu z_0. Existuje (jednoznačně určené) číslo $R \in [0, +\infty]$ tak, že řada (*) konverguje pro každé

$z \in U(z_0, R)$ a diverguje pro $|z - z_0| > R$. Na množině $U(z_0, R)$ lze řadu libovolně krát derivovat/integrovat (dle komplexní proměnné.) Speciálně, její součet je zde holomorfní. Viz kapitola 11.

Definice. Nechť z_0, $a_k \in \mathbb{C}$. Řada

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \qquad (1)$$

se nazývá Laurentova („lóránova“) řada o středu z_0. Chápeme ji jako součet řad

$$(2) \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \qquad \text{resp.} \qquad (3) \quad \sum_{l=1}^{\infty} a_{-l} (z - z_0)^{-l},$$

které se nazývají regulární resp. hlavní část řady (1). Řekneme, že (1) konverguje (absolutně konverguje), pokud řady (2) a (3) mají tuto vlastnost.

Poznámky.
- jde o zobecnění pojmu mocninné řady (*)
- úmluva: $a^0 = 1$ pro $\forall a \in \mathbb{C}$
- (3) a potažmo (1) nemá smysl pro $z = z_0$

Značení. Pro $z_0 \in \mathbb{C}$, $0 \le r < R \le +\infty$ definuji mezikruží

$$P(z_0; r, R) = \{ z \in \mathbb{C} : \ r < |z - z_0| < R \}.$$

Věta 23.4. [Konvergence Laurentovy řady.] Je dána Laurentova řada (1). Potom existují jednoznačně určená čísla r, $R \in [0, +\infty]$ tak, že
(i) R je poloměr konvegence regulární části (2)
(ii) hlavní část (3) konveguje pokud $|z - z_0| > r$ a diverguje pokud $|z - z_0| < r$.
Je-li $r < R$, pak Laurentova řada konverguje absolutně v $P(z_0; r, R)$ a její součet je zde holomorfní.
Terminologie: $P(z_0; r, R)$ se nazve mezikruží konvergence Laurentovy řady.

Věta 23.10. [Existence Laurentova rozvoje.] Nechť $f(z)$ je holomorfní v mezikruží $P(z_0; r, R)$. Potom platí

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \qquad z \in P(z_0; r, R). \qquad (1)$$

Tato řada se nazývá Laurentův rozvoj $f(z)$ v $P(z_0; r, R)$. Konverguje lokálně absolutně stejnoměrně na $P(z_0; r, R)$. Čísla a_k (tzv. Laurentovy koeficienty) jsou určena jednoznačně, a platí

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} \, dz, \qquad (2)$$

kde φ je libovolná kružnice $z_0 + \rho\,\mathrm{e}^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, $\rho \in (r, R)$.

Věta 23.11. [Taylorův rozvoj.] Nechť $f(z) \in \mathcal{H}(\Omega)$, $z_0 \in \Omega$. Rovnost

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k\,, \qquad \text{kde} \quad a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}\,,$$

platí v každém kruhu $U(z_0, R)$, který je částí Ω.

Definice. Pokud $f(z) \in \mathcal{H}(P(z_0, \delta))$, řekneme, že funkce f má v bodě z_0 izolovanou singularitu.

Definice. Nechť $f(z) \in \mathcal{H}(P(z_0, \delta))$. Koeficient a_{-1} v Laurentově rozvoji funkce $f(z)$ o středu z_0 nazýváme reziduum funkce $f(z)$ v bodě z_0. Značíme $\operatorname{res}_{z_0} f(z)$. Vzhledem k formuli (2) výše máme

$$\int_{\varphi} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{res}_{z_0} f(z)$$

(pro libovolnou kružnici $\varphi = z_0 + \varepsilon\,\mathrm{e}^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, $\varepsilon \in (0, \delta)$.) Pokud je $f(z)$ holomorfní dokonce v $U(z_0, \delta)$, je $\operatorname{res}_{z_0} f(z) = 0$.

Věta 23.12. [Reziduová věta.] Nechť $f(z) \in \mathcal{H}(\Omega \setminus K)$, kde Ω je oblast, K je konečná množina (izolovaných singularit). Nechť φ je kladně orientovaná Jordanova křivka v Ω taková, že $\operatorname{int}\varphi \subset \Omega$ a $\langle\varphi\rangle \cap K = \emptyset$. Potom

$$\int_{\varphi} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{\zeta \in K \cap \operatorname{int}\varphi} \operatorname{res}_{\zeta} f(z)\,.$$

Věta 23.13. [Pravidla pro výpočet rezidua.]

1. Nechť $f(z) = g(z)/(z - z_0)^n$, kde $g(z) \in \mathcal{H}(U(z_0, \delta))$, $n \in \mathbb{N}$. Potom

$$\operatorname{res}_{z_0} f(z) = \frac{1}{(n-1)!} g^{(n-1)}(z_0)\,.$$

2. Nechť $f(z) = g(z)/h(z)$, kde $g(z)$, $h(z) \in \mathcal{H}(U(z_0, \delta))$ a $h(z_0) = 0$, $h'(z_0) \neq 0$. Potom

$$\operatorname{res}_{z_0} f(z) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}\,.$$

3. Nechť $f(z) = g(z)/h(z)$, kde $g(z)$, $h(z) \in \mathcal{H}(U(z_0, \delta))$ a $h(z_0) = h'(z_0) = \cdots = h^{(p-1)}(z_0) = 0$, avšak $h^{(p)}(z_0) \neq 0$. Potom

$$\operatorname{res}_{z_0} f(z) = \frac{1}{(p-1)!} \lim_{z \to z_0} \Big[(z - z_0)^p f(z)\Big]^{(p-1)}\,.$$

Poznámka. Často používaný speciální případ bodu 1:

$$\operatorname{res}_{z_0} \frac{g(z)}{z - z_0} = g(z_0)\,, \qquad \operatorname{res}_{z_0} \frac{g(z)}{(z - z_0)^2} = g'(z_0)\,.$$

Poznámka. Rezidua se také dají odečíst přímo z Laurentovy řady dané funkce. Ta lze získat například dělením známých Taylorových řad. Spočtěte například

$$\operatorname{res}_0 \frac{1 - \cos(z)}{z^5 \sin(z)}.$$

Definice. Nechť $f(z) \in \mathcal{H}(P(z_0, \delta))$, kde $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ je Laurentův rozvoj funkce f v $P(z_0; \delta)$. Řekneme, že funkce f má v bodě z_0:
(i) odstranitelnou singularitu, je-li $a_k = 0$ pro $\forall k < 0$
(ii) pól násobnosti $p \in \mathbb{N}$, je-li $a_{-p} \neq 0$ a $a_k = 0$ pro $\forall k < -p$
(iii) podstatnou singularitu, je-li $a_k \neq 0$ pro nekonečně $k < 0$

Příklady.
• $\frac{\sin z}{z}$, $\frac{1-\cos z}{z^2}$ ... v bodě 0 odstranitelné singularity
• $\frac{e^{z^2}}{z^3}$ ... v bodě 0 pól násobnosti 3
• $\cosh(1/z)$ ... v bodě 0 podstatná singularita

Věta 23.14. [Odstranitelná singularita.] Nechť $f(z) \in \mathcal{H}(P(z_0, \delta))$. Potom je ekvivalentní:
(1) $f(z)$ má v bodě z_0 odstranitelnou singularitu
(2) existuje $g(z) \in \mathcal{H}(U(z_0, \delta))$ tak, že $f(z) = g(z)$ na $P(z_0, \delta)$
(3) $f(z)$ je omezená na jistém $P(z_0, \delta')$

Věta 23.15. [Pól.] Nechť $f(z) \in \mathcal{H}(P(z_0, \delta))$. Potom je ekvivalentní:
(1) existuje $p \in \mathbb{N}$ tak, že $f(z)$ má v z_0 pól násobnosti p
(2) $f(z) \to \infty$ pro $z \to z_0$

Definice. Množina M je hustá v Ω, pokud

$$\big(\forall w \in \Omega\big)\big(\forall \varepsilon > 0\big)\big[M \cap U(w, \varepsilon) \neq \emptyset\big]\,.$$

Názorně: prvky Ω mohu libovolně aproximovat pomocí prvků M.

Věta 23.16. [Podstatná singularita.] Nechť $f(z) \in \mathcal{H}(P(z_0, \delta))$. Potom je ekvivalentní:
(1) $f(z)$ má v z_0 podstatnou singularitu
(2) pro $\forall \delta' \in (0, \delta)$ je množina $f(P(z_0, \delta'))$ hustá v $\mathbb{C}$.

Definice. Bod z_0 nazveme hromadným bodem množiny M, jestliže

$$\big(\forall \delta > 0\big)\big[M \cap P(z_0, \delta) \neq \emptyset\big]\,.$$

Ekvivalentně: existují $z_n \in M$, $z_n \to z_0$, avšak $z_n \neq z_0$ pro $\forall n$.
Hromadné body množiny M značíme $\operatorname{der} M$.

Příklady. ① $\operatorname{der} \mathbb{Q} = \mathbb{R}$
② konečná množina nemá hromadné body
③ množina $\{1/n : \ n \in \mathbb{N}\}$ má jediný hromadný bod: 0

Lemma 23.5. Nechť $f(z) \in \mathcal{H}(U(z_0, R))$ a nechť z_0 je hromadný bod množiny $N = \{\zeta : \ f(\zeta) = 0\}$. Potom $f(z) = 0$ v $U(z_0, R)$.

Věta 23.17. [O jednoznačnosti.] Nechť $f(z) \in \mathcal{H}(\Omega)$, kde Ω je otevřená, souvislá množina. Nechť $N = \{\zeta : \ f(\zeta) = 0\}$ má v Ω alespoň jeden hromadný bod. Potom $f(z) = 0$ v Ω.

Důsledek. Nechť $f_1(z)$, $f_2(z) \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, a $f_1(x) = f_2(x)$ pro $\forall x \in \mathbb{R}$. Potom nutně $f_1(z) = f_2(z)$ pro $\forall z \in \mathbb{C}$.

Příklad Součtové vzorce pro cos a sin z $\mathbb{R}$ platí i v $\mathbb{C}$.

26. Fourierova transformace.

Definice. Pro $f(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ definujeme Fourierovu transformaci

$$\big[\mathcal{F}f\big](\xi) = \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-2\pi i(x,\xi)} f(x)\, dx\,, \qquad \xi \in \mathbb{R}^n\,.$$

Dále definujeme inverzní Fourierovu transformaci

$$\big[\mathcal{F}_{-1}f\big](\xi) = \check{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{2\pi i(x,\xi)} f(x)\, dx\,, \qquad \xi \in \mathbb{R}^n\,.$$

Zde (x, ξ) je skalární součin x, $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Poznámky.
- korektnost: $|\exp\{\pm 2\pi i(x,\xi)\}| = 1$, majoranta integrálu $|f(x)| \in L^1$
- $\mathcal{F}$ přiřazuje funkci $f(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ funkci $\widehat{f}(\xi) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$
- jiná varianta definice (ne ekvivalentní):

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x,\xi)} f(x)\, dx\,, \qquad \check{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x,\xi)} f(x)\, dx\,.$$

- vztah $\mathcal{F}_{-1}\{\mathcal{F}f\} = f$ není zřejmý, ověříme časem
- Pro $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \cos 2\pi\xi x\, dx - i \int_{\mathbb{R}} f(x) \sin 2\pi\xi x\, dx\,.$$

(Souvislost s Fourierovými řadami.)

Příklad. $f(x) = 1$ pro $x \in (-1, 1)$ a 0 jinde. Potom $\widehat{f}(0) = 2$ a

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{\sin(2\pi\xi)}{\pi\xi}, \qquad \xi \neq 0\,.$$

Značení. Prostory funkcí $f(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$.
- $L^p(\mathbb{R}^n)$ ... L^p-integrovatelné, $\|f\|_{L^p} = \left[\,\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p\,dx\right]^{1/p}$
- $C_b(\mathbb{R}^n)$ ... spojité a omezené, $\|f\|_{C_b} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |f(x)|$
- $C_0(\mathbb{R}^n)$ ... s limitou 0 v nekonečnu:

$$C_0(\mathbb{R}^n) = \{f \in C_b(\mathbb{R}^n) :\ |f(x)| \to 0 \text{ pro } |x| \to +\infty\}$$

- $C_c(\mathbb{R}^n)$ ... spojité s kompaktním nosičem:

$$C_c(\mathbb{R}^n) = \{f \in C(\mathbb{R}^n) :\ f(x) = 0 \text{ pro } |x| > R\}$$

Platí inkluze: $C_c \subset C_0 \subset C_b$ a $C_c \subset L^1$.

Věta 26.1. $\mathcal{F}$ je spojité lineární zobrazení z $L^1(\mathbb{R}^n)$ do $C_0(\mathbb{R}^n)$ a platí

$$\|\widehat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1\,.$$

Věta 26.2. Nechť $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Potom
(1) $\check{f}(\xi) = \widehat{f}(-\xi)$
(2) $\overline{\check{f}}(\xi) = \widehat{\overline{f}}(\xi)$, $\overline{\widehat{f}}(\xi) = \check{\overline{f}}(\xi)$
(3) $\widehat{f}(\xi - \eta) = \widehat{g}(\xi)$, kde $g(x) = e^{2\pi i(x,\eta)} f(x)$ a $\eta \in \mathbb{R}^n$ pevné
(4) $\widehat{g}(\xi) = e^{-2\pi i(\xi,z)} \widehat{f}(\xi)$, kde $g(x) = f(x - z)$ a $z \in \mathbb{R}^n$ pevné
(5) $\widehat{g}(\xi) = \frac{1}{|\varepsilon|^n} \widehat{f}(\xi/\varepsilon)$, kde $g(x) = f(\varepsilon x)$ pro pevné $\varepsilon \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Věta 26.3. [Vztah F.t. a derivace.]
(1) Nechť $f(x) \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap C_0(\mathbb{R}^n)$ a $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap C(\mathbb{R}^n)$. Potom

$$\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_j}}(\xi) = 2\pi i \xi_j \widehat{f}(\xi)\,.$$

(2) Nechť $f(x)$, $x_j f(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Potom

$$\frac{\partial \widehat{f}}{\partial \xi_j}(\xi) = \widehat{g}(\xi),$$

kde $g(x) = -2\pi i x_j f(x)$.

Poznámka. Názorně: derivace f dle x_j odpovídá násobení $\widehat{f}$ ($2\pi i$ krát) ξ_j. A naopak: derivace $\widehat{f}$ dle ξ_j odpovídá násobení ($-2\pi i$ krát) x_j.

Příklad. Připomeňme, že $\Delta u = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}$. Platí:

$$\big[\widehat{\Delta u(x)}\big](\xi) = -4\pi^2|\xi|^2\widehat{u}(\xi)\,.$$

Věta 26.4 Nechť $f(x)$ je spojitá v $\mathbb{R}$ a má omezený nosič. Nechť $\widehat{f}$ má omezený nosič. Potom nutně $f = 0$.

Poznámka. Hledáme prostor funkcí X tak, že $\mathcal{F} : X \to X$, v ideálním případě vzájemně jednoznačně.
Předchozí věta ukazuje, že funkce s omezeným nosičem nejsou vhodný kandidát. Podobně se ukazuje, že $\mathcal{F}L^1 \not\subset L^1$.
Vhodným kandidátem se ukáže Schwartzův prostor definovaný níže, a později též prostor L^2.

Definice. Multiindexem nazývám n-tici čísel $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, kde $\alpha_j \geq 0$ jsou celá. Číslo $|\alpha| = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j$ nazývám výška (stupeň) multiindexu. Pro funkci $f(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definuji

$$D^\alpha f(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} f(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}\,.$$

Pro vektor $x \in \mathbb{R}^n$ definuji

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}\,.$$

Příklady. Nechť $\alpha = (1, 0, 2)$. Potom

$$D^\alpha f(x) = \frac{\partial^3 f(x)}{\partial x_1 \partial x_3^2}\,, \qquad x^\alpha = x_1 x_3^2\,.$$

Definice. Schwartzův prostor (prostor rychle klesajících funkcí) definujeme jako

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \big\{ f(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n);\ x^\alpha D^\beta f(x) \ \text{ omezená pro } \ \forall\ \alpha,\ \beta \big\}\,.$$

Věta 26.5 (zobecnění Věty 26.3.) Nechť $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ Potom

$$[D^\alpha f]\widehat{\ }(\xi) = (2\pi i\xi)^\alpha \widehat{f}(\xi) \qquad \forall \alpha$$

a

$$\big[D^\alpha \widehat{f}\big](\xi) = \big[\widehat{(-2\pi i x)^\alpha f(x)}\big](\xi) \qquad \forall \alpha\,.$$

Poznámka. $\int_{\mathbb{R}^n} \frac{dx}{(1+|x|)^p} < \infty$, právě když $p > n$.
Věta 26.6. [Základní vlastnosti $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.]
(1) $C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subsetneq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$
(2) $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset C_0(\mathbb{R}^n) \cap L^p(\mathbb{R}^n)$, $\forall p \geq 1$
(3) $f(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \implies x^\alpha f(x),\, D^\alpha f(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\forall \alpha$

Věta 26.7. $\mathcal{F}\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Definice. Funkce $G(x) := \exp(-\pi|x|^2)$ se nazývá gausián.

Lemma 26.2. [F.t. gausiánu.] Platí $\widehat{G} = G$.

Lemma 26.3. Nechť $f \in C_b(\mathbb{R}^n)$, nechť $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\, dx = 1$ a $\varphi \geq 0$. Označme $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\varphi(\varepsilon^{-1}x)$. Potom

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\varphi_\varepsilon(y)\, dy = f(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n .$$

Poznámka. Výraz $\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\varphi_\varepsilon(y)\, dy$ se nazývá konvoluce funkcí f a φ_ε a označuje se $(f \star \varphi_\varepsilon)(x)$.

Věta 26.8. [Inverze F.t.] Nechť $f(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Potom $[\hat{f}(\xi)]\check{}(x) = f(x)$ a $[\check{f}(\xi)]\hat{}(x) = f(x)$ pro každé $x \in \mathbb{R}^n$.

Poznámka. Větu lze dokázat pouze za předpokladu $f, \hat{f} \in L^1$, viz K4, V18.10. Takto je také později potřeba v kapitole o Laplaceově transformaci.

Věta 26.9. F. t. je vzájemně jednoznačné lineární zobrazení $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ na $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Předběžné úvahy. Naším cílem je nyní rozšířit $\mathcal{F}$ na prostor $L^2(\mathbb{R}^n)$. Připomeňme, že

$$L^2(\mathbb{R}^n) = \left\{ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} :\ f \text{ je měřitelná, } \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2\, dx < \infty \right\},$$

přičemž ztotožňujeme funkce, které se rovnají skoro všude. Na tomto prostoru definujeme skalární součin a normu takto:

$$\langle f, g \rangle := \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{g(x)}\, dx\,, \tag{1}$$

$$\|f\|_{L^2} = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2\, dx \right\}^{1/2} . \tag{2}$$

K hlubším vlastnostem patří: $L^2(\mathbb{R}^n)$ je úplný, a množina $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ je v něm hustá.

Lemma 26.4. Nechť f, $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Potom

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\hat{g}(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x)g(x)\,dx\,, \quad \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\check{g}(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} \check{f}(x)g(x)\,dx\,.$$

Věta 26.10. [Plancherelova rovnost.] Nechť f, $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Potom

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{g(x)}\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{g}(\xi)}\,d\xi\,.$$

Jinými slovy, $\mathcal{F}$ zachovává skalární součin v $L^2(\mathbb{R}^n)$, speciálně zachovává normu, tj. $\|f\|_{L^2} = \|\hat{f}\|_{L^2}$ pro $\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Věta 26.11. [F.t. v L^2.] Existuje lineární zobrazení $\mathcal{F}_2 : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ takové, že
(1) $\mathcal{F}_2 f = \mathcal{F} f$ pro $\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$
(2) $\mathcal{F}_2$ je izomorfismus $L^2(\mathbb{R}^n)$ na sebe, tj. vzájemně jednoznačné zobrazení, zachovávající normu a skalární součin.

Poznámka. Jak prakticky počítat $\mathcal{F}_2$? Lze dokázat, že pro dané $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ existují $R_n \to \infty$ taková, že pro skoro všechna ξ je

$$\mathcal{F}_2 f(\xi) = \lim_{n\to\infty} \int_{|x|<R_n} \mathrm{e}^{-2\pi i(x,\xi)}\, f(x)\,dx\,.$$

Speciálně odtud plyne, že pro $f \in L^1 \cap L^2$ je $\mathcal{F}_2 f = \mathcal{F} f$. Nadále tedy budeme psát prostě $\mathcal{F} f$ či $\hat{f}$ místo $\mathcal{F}_2 f$.

Příklad. Buď $f(x) = 1/(x+i)$, pak $\mathcal{F}_2 f(\xi) = -2\pi i e^{-2\pi\xi}\chi_{(0,+\infty)}$ s.v. $\mathbb{R}$.

A to je konec.