Nerovnice

1. $|3x-1| < x < |3x+1|$ **2.** $3x-1 < |x| < 3x+1$ **3.** $|x+1|-|2x+4| \leq x+4$ **4.** $\cos(x) < \frac{1}{2}$ **5.** $\cos^2(x) > \sin^2(x)$ **6.** $\log_{\frac{1}{3}}(x^2-3x+3) \geq 0$ **7.** $|\log_e(x)| < 1$ **8.** Řešte nerovnici v závislosti na parametru $c \in \mathbb{R}$: $x^2 - cx + 1 < 0$

Funkce

Určete definiční obory a načrtněte grafy funkcí **9.** $f(x) = ||||x|-1|-1|-1|$ Najděte definiční obor a obor hodnot funkce

Výroky a logika

Dokažte, že platí **10.** $A \Rightarrow A$ **11.** $(\text{non}\,(A \Rightarrow B)) \Leftrightarrow (A \wedge (\text{non}\,B))$

Zapište negace výroků **12.** $\exists x \in \mathbb{R} : \cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}$ a rozhodněte, který z výroků je pravdivý.

Platí následující výroky? **13.** $\forall a \in \mathbb{R}, \exists \varepsilon > 0, \exists \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R} : x \in (a, a+\varepsilon) \Leftrightarrow |x-\alpha| < 1$

Hádanky z ostrova poctivců a padouchů (podle R. Smullyana a L. Picka): **14.** Jdete kolem tří obyvatel ostrova a zeptáte se: „Kolik je mezi vámi poctivců?“ A odpoví nezřetelně, tak se zeptáte B: „Co říkal A?“ B odpoví: „A říkal, že je mezi námi jediný poctivec.“ Nato řekne C: „Nevěřte B, ten lže!“ Co jsou B a C? **15.** A řekne: „Buď jsem já padouch a nebo B je poctivec.“ Co jsou A a B? **16.** A řekne: „Já jsem padouch, ale B je poctivec.“ Co jsou A a B? **17.** A řekne: „B a C mají stejnou povahu.“ Nato se zeptáte C: „Mají A a B stejnou povahu?“ Co odpoví C?

. . . . 14.10. a 16.10.

Množiny a zobrazení

Dokažte: **18.** Nechť A_i, $i = 1, 2, \ldots$ je systém libovolných množin a nechť $B_n = \cup_{i=1}^n A_i$. Potom $\cup_{n=1}^\infty A_n = \cup_{n=1}^\infty B_n$ a pro všechna $n \in \mathbf{N}$ platí $B_n \subset B_{n+1}$. **19.** Je-li navíc $C_{n+1} = B_{n+1} - B_n$ pro $n \in \mathbf{N}$, $C_1 = B_1$, pak platí opět $\cup_{n=1}^\infty A_n = \cup_{n=1}^\infty C_n$ a navíc pro $j, k \in \mathbf{N}$, $j \neq k$ je $C_j \cap C_k = \emptyset$.

20. Věta 4: Buď f prosté zobrazení. Pak platí 1) $D(f^{-1}) = R(f)$, 2) $D(f) = R(f^{-1})$, 3) f^{-1} je zobrazení, 4) f^{-1} je prosté, 5) $f^{-1} \circ f = id_{D(f)}$, 6) $f \circ f^{-1} = id_{R(f)}$

21. Věta 3: Nechť $f : A \to B$, $M_1, M_2 \subset D(f)$, P_1, P_2 libovolné množiny. Pak 1) $f(M_1 \cup M_2) = f(M_1) \cup f(M_2)$, 2) $f_{-1}(P_1 \cup P_2) = f_{-1}(P_1) \cup f_{-1}(P_2)$, 3) $f(M_1 \cap M_2) \subset f(M_1) \cap f(M_2)$, 4) $f_{-1}(P_1 \cap P_2) = f_{-1}(P_1) \cap f_{-1}(P_2)$, 5) $f(M_1 \setminus M_2) \supset f(M_1) \setminus f(M_2)$, 4) $f_{-1}(P_1 \setminus P_2) = f_{-1}(P_1) \setminus f_{-1}(P_2)$

22. Pro která f platí rovnost v předchozích bodech 3) a 5)?

. . . . 21.10. a 23.10.

Reálná čísla

23. Přednáška Věta 6

Matematická indukce

Dokažte matematickou indukcí následující rovnosti a nerovnosti **24.** $1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ **25.** $1^2+2^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ **26.** $1^3+2^3+\cdots+n^3=(1+2+\cdots+n)^2$ **27.** $(a+b)^n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$ (binomická věta) **28.** $\sqrt[n]{x_1\cdot\dots\cdot x_n}\le\dfrac{1}{n}(x_1+\dots x_n)$, $x_i\ge 0$, $i=1,2,\dots,n$ (AG nerovnost)

29. [Z, 1.1/21a] **30.** [Z, 1.1/22]

. . . . 30.10.

31. $\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(1+x_i)\ge 1+\sum_{i=1}^{n}x_i$, $x_i\ge -2$, x_i mají stejná znaménka **32.** Věta 11 z přednášky, dokončení příště **33.** [Z, 21 b] **34.** [Z, 22] vyjasnění

. . . . 6.11.

Dokončení důkazu Věty 11, procvičování vzorových příkladů k 1. zápočtové písemce

. . . . 11.11.

poslední dotazy před 1. zápočtovou písemkou, příklady na konvergenci základních posloupností, tj. pro $k\in\mathbb{N}$, $a>1$: n^k, a^n, $n!$, $n!/a^n$, a^n/n^k, pro $n\to+\infty$, důkaz lemmatu o spojitosti k-té odmocniny.

Výsledky ukázkových příkladů:

1a) $(-\infty,-1]\cup[9,+\infty)$, 1b) $(-2,-1]\cup(3,+\infty)$, 1c) $[-(1+\sqrt{5})/2,-1)\cup(1,1+\sqrt{5})/2]$, 1d) $(-\infty,-2)\cup(1-\sqrt{3},1+\sqrt{3})\cup(3,+\infty)$

3a) $D(f)=\mathbb{R}\setminus\{-1/2\}$, $D(f^{-1})=\mathbb{R}\setminus\{1/2\}$, $f^{-1}(y)=(1+y)/(1-2y)$, $f(A)=(-\infty,1/5)\cup[1,+\infty)$

3b) $D(f)=[0,+\infty)$, $D(f^{-1})=[-2,1/2)$, $f^{-1}(y)=((y+2)/(1-2y))^2$, $f(A)=(-1/3,1/2)$

3c) $D(f)=\mathbb{R}$, $D(f^{-1})=(1/2,+\infty)$, $f^{-1}(y)=(1-y^2)/(2y-1)$, $f(A)=(1/2,+\infty)$

3d) $D(f)=\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $D(f^{-1})=(-1,1)\setminus\{1/2\}$, $f^{-1}(y)=(2y-1)/(y^2-1)$, $f(A)=(-1,1/2)$

. . . . 13.11.

1. zápočtový test, $\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+2)^{100}-(n+5)^{100}}{(n-4)^{100}-n^{100}}$.

. . . . 18.11.

$$\lim_{n\to+\infty}n^k=+\infty,\quad k\in\mathbb{N},$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n^k} = +\infty, \quad a > 1, k \in \mathbb{N},$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(\frac{n}{a})^n}{b^n} = +\infty, \quad a > e, b > 1,$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{(\frac{n}{a})^n} = +\infty, \quad a > e,$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(\frac{n}{a})^n}{n!} = +\infty, \quad n \in (0, e),$$

Lemma:

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2 : (\frac{n}{e})^n < n! < e^2(\frac{n}{e})^{n+1}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1, \quad a > 0,$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^k} = 1, \quad k \in \mathbb{Z},$$

Příklady: [Z, 25, 27, 29, 31]

....20.11.

[Z, 26, 28, 30, 33, 38, 39, 40, 41, 59]
Domácí úkol: první dva vzorové příklady pro druhý zápočtový test, vaší přípravu otestuji

....25.11.

vzorové příklady pro 2. zápočtový test (1,2,3,7), [Z, 50, 52]
Domácí úkol: vzorové příklady 4, 5, 6 pro druhý zápočtový test, vaší přípravu otestuji

....27.11.

???

....2.12.

2. zápočtová písemka, základní příklady konvergentních řad, $\sum_{k=1}^{\infty} q^k$ konverguje právě, když $q \in (-1, 1)$, $\sum_{k=1}^{\infty} k^{\alpha}$ konverguje právě, když $\alpha < -1$

....4.12.

vyšetřování konvergence řad pomocí srovnávacího a limitního srovnávacího kriteria

....9.12.

konvergence řad pomocí podílového, odmocninového a Raabeova kritéria, du: $\sum_{k=1}^{\infty} |\cos(k)|(\frac{2k+10}{3k+1})^k$.

....11.12.

$\sum_{k=1}^{\infty} \cos(k)$, omezenost částečných součtů $\sum_{k=1}^{\infty} \cos(k)$, konvergence řad pomocí Abelova a Dirichletova kriteria, konvergence $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(k)}{k^{\alpha}}$, $\alpha \in (0, 1)$ a divergence $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\cos(k)|}{k^{\alpha}}$, du: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k)}{\lg(k)} e^{1/n}$.

. . . . 16.12.

Limity funkci: [Z, 70,71,74,75], základní limity: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1, \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}, \lim_{x\to 0}\frac{\exp(x)-1}{x} = 1, \lim_{x\to 0}\frac{\lg(1+x)}{x} = 1, \lim_{x\to 1}\frac{\lg(x)}{x-1} = 1, k \in \mathbb{N} : \lim_{x\to +\infty}\frac{\exp(x)}{x^k} = +\infty$

Domácí úkol: Pro $\alpha > 0$ platí $\lim_{x\to+\infty}\frac{\exp(x)}{x^\alpha} = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty}\frac{\lg(x)}{x^\alpha} = 0$.

. . . . 6.1.

dopočtení vzorových příkladů pro 3. zápočtový test

. . . . 8.1.

3. zápočtový test, derivace funkcí $\arcsin(2x/(x^2 + 1))$

domácí úkol: derivace funkcí $\lg(\lg(|sin(x)|))$, $x^2 \cos((1/|x|^\alpha)$, $\alpha > 0$

. . . . 12.1.

derivace funkcí $\lg(\lg(|\sin(x)|))$, $x^2 \cos((1/|x|^\alpha)$, $\alpha > 0$

průběhy funkcí $\lg((x + 1)/(x - 1))$, $\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x^2 - 1}$

domácí úkol: průběh $\arccos((x^2 - 1)/(x^2 + 1))$