2. zápočtový test, verze A

Na test máte 30 minut. Hodnotí se binárně. Příklad je buď správně nebo chybně. Potřebujete mít 2 příklady správně.

Rozhodněte, zda následující řady konvergují, konvergují absolutně nebo divergují.

1)

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{k^2+1}-\sqrt{k^2-\pi}}{\sqrt[3]{k+1}},$$

2)

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k!}{2^k k^2},$$

3)

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \sin(k)\frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Jednotlivé kroky výpočtu je třeba zdůvodnit.

Varianta A

Ad 1: Víme, že

$$\frac{\sqrt{k^2+1}-\sqrt{k^2-\pi}}{\sqrt[3]{k+1}} = \frac{k^2+1-(k^2-\pi)}{\sqrt{k^2+1}+\sqrt{k^2-\pi}}\cdot\frac{1}{\frac{\sqrt[3]{k+1}}{\sqrt[3]{k}}\cdot\sqrt[3]{k}} =$$

$$= \frac{\pi+1}{\sqrt[3]{k}\cdot k}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}+\sqrt{1-\frac{\pi}{k^2}}}\cdot\sqrt{\frac{k}{k+1}} =: a_k$$

Vidíme, že $\frac{a_k}{(k\cdot\sqrt[3]{k})^{-1}} \to \frac{1}{2}$. Protože řada $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k\cdot\sqrt[3]{k}}$ konverguje, konverguje $\sum_{k=10}^{+\infty}\frac{\sqrt{k^2+1}-\sqrt{k^2-\pi}}{\sqrt[3]{k+1}}$ absolutně dle srovnávacího kritéria.

Ad 2: Def. $a_k := \frac{k!}{2^k k^2}$. Pak $\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{(k+1)!}{2^{k+1}(k+1)^2}\cdot\frac{2^k k^2}{k!} =$

$$(k+1)\left(\frac{k}{k+1}\right)^2\cdot\frac{1}{2} \xrightarrow[k\to+\infty]{} +\infty.$$ Řada diverguje podle podílového kritéria. (Navíc $a_k \to +\infty$!)

Ad 3: Platí:
- $\{\sin k\}$ má omezené částečné součty
- $\frac{1}{\sqrt{k}} \xrightarrow{k\to+\infty} 0$ monotónně

Řada tedy konverguje podle Dirichletova kritéria.

Také platí: $\frac{|\sin k|}{\sqrt{k}} \geq \frac{\sin^2 k}{\sqrt{k}} = \frac{1-\cos 2k}{\sqrt{k}}$. Protože $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\cos 2k}{\sqrt{k}}$ konverguje podle téhož kritéria a $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{k}}$ diverguje, diverguje i řada $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{|\sin k|}{\sqrt{k}}$. Řada $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\sin k}{\sqrt{k}}$ tedy nekonverguje absolutně.