2. zápočtový test, verze B

Na test máte 30 minut. Hodnotí se binárně. Příklad je buď správně nebo chybně. Potřebujete mít 2 příklady správně.

Rozhodněte, zda následující řady konvergují, konvergují absolutně nebo divergují.

1)

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{k^2+k} - \sqrt{k^2+\sqrt{k}}}{k},$$

2)

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k!}{(3k)^k},$$

3)

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \sin(ek) \frac{1}{k^2}.$$

Jednotlivé kroky výpočtu je třeba zdůvodnit.

Varianta B

ad 1: $$\frac{\sqrt{k^2+k}-\sqrt{k^2+\sqrt{k}}}{k} = \frac{\cancel{k^2}+k-\cancel{k^2}-\sqrt{k}}{\sqrt{k^2+k}+\sqrt{k^2+\sqrt{k}}}\cdot\frac{1}{k} =$$

$$\frac{k\left(1-\frac{1}{\sqrt{k}}\right)}{k^2\left(\sqrt{1+\frac{1}{k}}+\sqrt{1+k^{-3/2}}\right)} =: a_k.$$ Vidíme tedy, že

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{a_k}{\frac{1}{k}} = \frac{1}{2}$$ a řada diverguje podle srovnávacího kritéria.

ad 2) Definujeme $a_k := \frac{k!}{(3k)^k}$. Pak $$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{(k+1)!}{(3(k+1))^{k+1}}\cdot\frac{(3k)^k}{k!} =$$

$$= \frac{(k+1)}{3}\left(\frac{k}{k+1}\right)^k\cdot\frac{1}{k+1} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k}\cdot\frac{1}{3} \longrightarrow \frac{1}{3e} < 1$$ a

řada tedy podle podílového kritéria konverguje.

ad 3) Platí: $|\sin(ke)|\cdot\frac{1}{k^2} \le \frac{1}{k^2}$ a tedy řada konverguje

podle srovnávacího kritéria absolutně.