3. zápočtový test, verze B

Na test máte 30 minut. Hodnotí se binárně. Příklad je buď správně nebo chybně. Potřebujete mít 2 příklady správně.

Určete následující limity, nebo dokažte, že daná limita neexistuje:

1)

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+a}\cdot\sqrt{x+b}-x, \quad \text{pro } a,b\in\mathbb{R}$$

2)

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+x^2}{1-2x^2}\right)^{\frac{1}{x^2}},$$

Spočtěte definiční obor derivace a derivaci funkce f:

3)

$$f(x) = (\cos(x))^{\lg(x)}$$

.

Jednotlivé kroky výpočtu je třeba zdůvodnit.

3. zápočtový test, verze B – NMMA101 – 2017

1) $$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+a}\cdot\sqrt{x+b}-x = \lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^2}+(a+b)x+ab\cancel{-x^2}}{\sqrt{x^2+(a+b)x+ab}+x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\left(a+b+\frac{ab}{x}\right)}{\cancel{x}\left(\sqrt{1+\frac{a+b}{x}+\frac{ab}{x^2}}+1\right)} = \frac{a+b}{2}$$

2) $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+x^2}{1-2x^2}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}\exp\left(\frac{1}{x^2}\lg\frac{1+x^2}{1-2x^2}\right) =: L$$

Nejprve spočteme

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\lg\frac{1+x^2}{1-2x^2} = \lim_{x\to 0}\underbrace{\frac{\lg\frac{1+x^2}{1-2x^2}}{\frac{1+x^2}{1-2x^2}-1}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\frac{\cancel{1}+x^2-\cancel{1}+2x^2}{(1-2x^2)\,x^2}}_{\to 3} = 3$$

vnější: $\dfrac{\lg y}{y-1}\xrightarrow{y\to 1} 1$

vnitřní: $\dfrac{1+x^2}{1-2x^2}\xrightarrow{x\to 0} 1$

navíc: $1+x^2=1-2x^2$ pouze pro $x=0$.

Tedy, vzhledem ke spojitosti exp v 3 platí: $L=e^3$.

3) $f(x)=\exp(\lg x\,\lg\cos x)$

$$D(f) = (0,+\infty)\cap\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)\right) =$$

$$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{3}{2}\pi,\frac{5}{2}\pi\right)\cup\left(\frac{7}{2}\pi,\frac{9}{2}\pi\right)\cup\dots$$

Pro $x\in D(f)$: $$f'(x) = (\cos x)^{\lg x}\left(\frac{1}{x}\lg\cos x+\lg x\,\frac{1}{\cos x}(-\sin x)\right)$$

$$=(\cos x)^{\lg x}\left(\frac{\lg\cos x}{x}-\lg x\,\operatorname{tg} x\right)$$