1. zápočtový test, verze A

Na test máte 30 minut. Hodnotí se binárně. Příklad je buď správně nebo chybně. Potřebujete mít 2 příklady správně.

Určete následující limity, nebo dokažte, že daná limita neexistuje:

1)

$$\lim_{n\to+\infty 0} \sqrt{n}(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2+2\sqrt{n}+3}),$$

2)

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{(n+3)^2-(n+1)^2},$$

3)

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3n!+n^6+\sqrt[n]{n}}{n\sin(n)+(n-1)!(n+2)}$$

.

Jednotlivé kroky výpočtu je třeba zdůvodnit.

A

ad 1)
$$\sqrt{n}\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2+2\sqrt{n}+3}\right)=\sqrt{n}\,\frac{-2-2\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2+2\sqrt{n}+3}}$$

$$=\frac{-\frac{2}{\sqrt{n}}-2}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1+2n^{-3/2}+\frac{3}{n^2}}}\xrightarrow{n\to+\infty}-1$$

ad 2)

$$1\le\sqrt[n]{(n+3)^2-(n+1)^2}=\sqrt[n]{4n+8}\underset{n\ge 2}{\le}\sqrt[n]{8}\cdot\sqrt[n]{n}\longrightarrow 1$$

a tedy dle věty o policajtech $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{(n+3)^2-(n+1)^2}=1$

ad 3)
$$\frac{3n!+n^6+\sqrt[n]{n}}{n\sin(n)+(n-1)!\,(n+2)}=\frac{3+\frac{n^6}{n!}+\frac{\sqrt[n]{n}}{n!}}{\frac{\sin(n)}{(n-1)!}+1+\frac{2}{n}}\xrightarrow{n\to+\infty}3$$

Využívali jsme aritmetiku limit, nástroj škálu, a známé limity $\sqrt[n]{n}$, $\sqrt[n]{a}$, $a\in(0,+\infty)$.