

1. zápočtový test, verze B

Na test máte 30 minut. Hodnotí se binárně. Příklad je buď správně nebo chybně. Potřebujete mít 2 příklady správně.

Určete následující limity, nebo dokažte, že daná limita neexistuje:

1)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \sqrt[n]{n} (\sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2 + 2}),$$

2)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{2 + \sin(n)},$$

3)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^n + \sqrt{e^n} + 4}{(n+1)^n + n^3 + \sqrt[3]{n}}.$$

Je známo, že $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + 1/n)^n = e$. Jednotlivé kroky výpočtu je třeba zdůvodnit.

B

$$\text{ad 1)} \quad n \cdot \sqrt[n]{n} \left(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2+2} \right) = n \sqrt[n]{n} \frac{-1}{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2+2}} =$$

$$= - \frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}} + \sqrt{1+\frac{2}{n^2}}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2}$$

ad 2)

$$1 \leq \sqrt[3]{2 + \sin n} \leq \sqrt[3]{3}$$

$$\downarrow n \rightarrow +\infty$$

$$\downarrow n \rightarrow +\infty$$

$$1$$

$$1$$

$$\text{Also der obige o. peripheriert } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{2 + \sin n} = 1$$

$$\text{ad 3)} \quad \frac{n^n + \sqrt[n]{e^n} + \gamma}{(n+1)^n + n^3 + \sqrt[3]{n}} = \left(\frac{n}{n+1} \right)^n \frac{1 + \frac{\sqrt[n]{e^n}}{n^n} + \frac{\gamma}{n^n}}{1 + \frac{n^3}{(n+1)^n} + \frac{\sqrt[3]{n}}{(n+1)^n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{e}$$

$$\xrightarrow{\substack{\rightarrow \frac{1}{e} \\ n \rightarrow +\infty}} \underbrace{\rightarrow 1}_{n \rightarrow +\infty}$$

Vergleichende arithmetische limit, mit dem Stetigkeitssatz berechnen

$\sqrt[n]{a}$, $\sqrt[n]{n}$, $a \in (0, +\infty)$.