1. zkoušková písemka, úterý 22.5.

I) [10b] Nalezněte řešení rovnice $4u_{xy} - u_{yy} = 0$ pro $u = u(x,y)$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$. K řešení použijte záměnu proměnných $\xi = x + y$, $\eta = x - 2y$. Řešte nejprve obecně a poté nalezněte všechna řešení, která splňují podmínku $u(x,0) = 0$.

II) [10b] Najděte řešení rovnice vedení tepla $\partial_t u - \partial_x^2 u = 0$ na omezeném intervalu $[0,\pi]$, s okrajovými podmínkami $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$,

- pro počáteční podmínku $u(x,0) = x(\pi - x)$, $x \in \mathbb{R}$; proveďte celý výpočet metodou rozdělení proměnných, nemusíte dělat formální diskusi řešení;
- pro počáteční podmínku $u(x,0) = \sin^3(x)$, $x \in [0,\pi]$; (Nápověda: uvědomte si, že Fourierova řada funkce $\sin^3(x)$ nemá příliš mnoho členů)

III) [10b] Uvažte numerické schéma

$$v_m^{n+1} = \frac{1}{2}(v_{m+1}^n + v_{m-1}^n) - \frac{a\lambda}{1 + (a\lambda)^2}(v_{m+1}^n - v_{m-1}^n) + kf_m^n$$

pro transportní rovnici $\partial_t u + a\partial_x u = f$.

- Rozhodněte, zda je schéma explicitní nebo implicitní, tříkrokové nebo jednokrokové.
- Pro která $\lambda := k/h > 0$ je schéma stabilní?
- Najděte správný tvar schématu pro konsistenci. Je schéma konsistentní?

Ad 1) Provedeme lineární transformaci souřadnic.

$$\xi = ax + by\,;\quad \eta = cx + dy\,,$$

$$u(x,y) = v(\underbrace{ax+by}_{\xi},\ \underbrace{cx+dy}_{\eta})$$

Dosazení:

$$\partial_x u = a\partial_1 v + c\partial_2 v$$

$$\partial_y u = b\partial_1 v + d\partial_2 v$$

$$\partial_x\partial_y u = a(b\partial_1^2 v + d\partial_1\partial_2 v) + c(\partial_1\partial_2 v\, b + \partial_2^2 v\, d)$$

$$= ab\,\partial_1^2 v + (ad + cb)\partial_1\partial_2 v + cd\,\partial_2^2 v$$

$$\partial_y^2 v = b(\partial_1^2 v\, b + \partial_1\partial_2 v\, d) + d(\partial_1\partial_2 v\, b + \partial_2^2 v\, d) =$$

$$= b^2\partial_1^2 v + 2bd\,\partial_1\partial_2 v + d^2\partial_2^2 v$$

$$4\partial_x\partial_y u - \partial_y^2 u = \partial_1^2 v\,(4ab - b^2) + \partial_1\partial_2 v\,(4ad + 4cb - 2bd) + \partial_2^2 v\,(4cd - d^2)$$

Chci: $4ab - b^2 = 0 \Rightarrow 4a - b = 0 \ \vee\ b = 0$

$4cd - d^2 = 0 \Rightarrow 4c = d \ \vee\ d = 0$

Položíme $b = 0$; $d = 4$, $c = 1$, $a = 1$. Tedy

$$u(x,y) = v(x, x + 4y)$$

Kontrola: $\partial_y u(x,y) = 4\partial_2 v$, $\partial_x\partial_y u = 4\partial_1\partial_2 v + 4\partial_2^2 v$

$$\partial_y^2 u = 16\,\partial_2^2 v$$

$$4\partial_x\partial_y u - \partial_y^2 u = 16\,\partial_1\partial_2 v$$

Řešíme $\partial_1\partial_2 v = 0$. $\partial_2 v(\xi,\eta) = c_1(\eta)$, $v(\xi,\eta) = \int c_1(\eta)\,d\eta + c_2(\xi)$

$v(\xi,\eta) = g(\xi) + f(\eta)$ pro vhodné g, f.

Obecný tvar u: $u(x,y) = g(x) + f(x + 4y)$

Poč. podm.: $0 = g(x) + f(x) \Rightarrow g(x) = -f(x)$. Tedy: $u(x,y) = f(x+4y) - f(x)$

řeší úlohu i s poč. podm. (pro lib. vhodné hladké f).

ad2) Nejdříve hledáme řešení bez. poč. podm. ve tvaru

$u(x,t) = X(x)T(t)$: $\quad T'(t)X(x) - T(t)X''(x) = 0$

$$\frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = c \quad \text{protože } \frac{T'}{T} \text{ závisí pouze na } t,\ \frac{X''}{X} \text{ pouze na } x$$

Řešíme $\quad X'' - cX = 0 \quad$ v $(0,\pi)$

$X(0) = X(\pi) = 0$

a) $c > 0$: f.s.: $e^{\pm\sqrt{c}x}$; OŘ : $Ae^{+\sqrt{c}x} + Be^{-\sqrt{c}x}$

$X(0) = 0 \Rightarrow B = -A$: OŘ : $A(\sinh\sqrt{c}\,x)$

$X(\pi) = 0 \Rightarrow A = 0$ nebo $\sqrt{c} = 0$ ↯ spor.

b) $c = 0$ f.s. $1, x$ OŘ $A + Bx$, $X(0) = 0 \Rightarrow A = 0$

$X(\pi) = 0 \Rightarrow B = 0$ ↯ spor

c) $c < 0$ f.s.: $\sin(\sqrt{-c}\,x)$, $\cos(\sqrt{-c}\,x)$, $X(0) = 0$: OŘ : $\alpha\sin(\sqrt{-c}\,x)$

$X(\pi) = 0$: $\sqrt{-c}\,\pi = k\pi \Rightarrow c = -k^2$

$\Rightarrow$ Připadají pouze následující možnosti pro X: $X_k(x) = \sin kx$; $c_k = -k^2$, $k \in \mathbb{N}$.

Dopočteme T : $T' + k^2 T = 0 \Rightarrow T(t) = Ae^{-k^2 t}$

Obecné řešení ve tvaru řady: $\quad u(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} A_k e^{-k^2 t} \sin kx$.

Poč. podm.: $u(x,0) = \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \sin kx$.

PS je Fourierova řada poč. podm. vzhledem k OG úplném systému

$\{\sin kx\}_{k\in\mathbb{N}}$ v $L^2(0,\pi)$. $\quad A_k = \dfrac{\int_0^\pi u(x,0)\sin kx\,dx}{\|\sin kx\|^2_{L^2(0,\pi)}}$.

$$\|\sin kx\|^2_{L^2(0,\pi)} = \int_0^\pi \sin^2 kx\,dx = \int_0^\pi \frac{1}{2}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

Spočtěme A_k pro $x(\pi - x)$:

$$\int_0^\pi \underbrace{x(\pi-x)}_{\downarrow d \atop \pi - 2x} \underbrace{\sin kx\,dx}_{\downarrow i \atop -\frac{\cos kx}{k}} = \underbrace{\left[x(\pi-x)\left(-\frac{\cos kx}{k}\right)\right]_0^\pi}_{=0} + \frac{1}{k}\int_0^\pi \underbrace{(\pi-2x)}_{\downarrow d \atop -2} \underbrace{\cos kx\,dx}_{\downarrow i \atop \frac{\sin kx}{k}} =$$

$$= \underbrace{\left[(\quad)\sin kx\right]_0^\pi}_{=0} + \frac{2}{k^2}\int_0^\pi \sin kx\,dx = \frac{2}{k^2}\left[-\frac{\cos kx}{k}\right]_0^\pi =$$

$$\frac{2}{k^3}\left(1-(-1)^k\right)$$

Hledané řešení ve tvaru řady je tedy: $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4}{k^3}\frac{1}{\pi}\left(1-(-1)^k\right)e^{-k^2 t}\sin kx$
(Kandidát)

A_k pro $\sin^3 x$: $\sin^3 x = \sin x \dfrac{1 \mp \cos 2x}{2}$

$\sin(x \pm 2x) = \sin x \cos 2x \pm \sin 2x \cos x$; $\sin x \cos 2x = \frac{1}{2}(\sin 3x - \sin x)$

$$\sin^3 x = \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\left(\sin 3x - \sin x\right) = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x$$

$$\left(= \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \sin kx \text{ pro vhodné } A_k\right)$$

Hledané řešení tedy je: $u(x,t) = \frac{3}{4}e^{-t}\sin x - \frac{1}{4}e^{-9t}\sin 3x$

ad 3)

a) Jedná se o explicitní schéma, které je jednokrokové!

b) Von Neumannova analýza:

$$g(\xi,k,h) = \frac{1}{2}\left(e^{ih\xi} + e^{-ih\xi}\right) - \frac{a\lambda}{1+a^2\lambda^2}\left(e^{ih\xi} - e^{-ih\xi}\right)$$

$$= \cos(h\xi) - \frac{a\lambda}{1+a^2\lambda^2} 2i \sin(h\xi)$$

$$|g(\xi,k,h)|^2 = \cos^2(h\xi) + \frac{4a^2\lambda^2}{(1+a^2\lambda^2)^2}\sin^2(h\xi) \overset{?}{\leq} 1 = \cos^2 h\xi + \sin^2 h\xi$$

Položíme: $\dfrac{4a^2\lambda^2}{(1+a^2\lambda^2)^2} \leq 1$, $4a^2\lambda^2 \leq 1 + 2a^2\lambda^2 + a^4\lambda^4$

$$0 \leq 1 - 2a^2\lambda^2 + a^4\lambda^4 = (1-a^2\lambda^2)^2$$

Schéma je nepodmíněně stabilní (v oblasti stability $(0,+\infty)^2$).

Zkoumejme konzistenci: Vhodný (normalizovaný) tvar:

$$\frac{v_m^{n+1} - \frac{1}{2}\left(v_{m+1}^n + v_{m-1}^n\right)}{k} + \frac{2a}{1+(a\lambda)^2}\,\frac{v_{m+1}^n - v_{m-1}^n}{2h} = f_m^n$$

Rozviňme v bodě (t,x)

$$u(t+k,x) = u(t,x) + k\,\partial_t u(t,x) + O(k^2)$$

$$u(t,x+h) = u(t,x) + h\,\partial_x u(t,x) + \frac{h^2}{2}\partial_x^2 u(t,x) + O(h^3)$$

$$u(t,x-h) = u(t,x) - h\,\partial_x u(t,x) + \frac{h^2}{2}\partial_x^2 u(t,x) + O(h^3)$$

$$\frac{1}{2}\left(u(t,x+h) + u(t,x-h)\right) = u(t,x) + \frac{h^2}{2}\partial_x^2 u(t,x) + O(h^3))$$

1. člen: $\partial_t u(t,x) + O(k) + O\left(\frac{h^2}{k}\right)$

$$u(t,x+h) - u(t,x-h) = 2h\,\partial_x u(t,x) + O(h^3)$$

2. člen: $\frac{2a}{1+(a\lambda)^2}\,\partial_x u(t,x) + O(h^2)$

Dosadíme-li řešení PDR do schématu s $f=0$, dostaneme:

$$O(k) + O\left(\frac{h^2}{k}\right) + O(h^2) + \underbrace{\partial_x u(t,x)\overbrace{\left(\frac{2a}{1+a^2\lambda^2} - a\right)}^{(+)}}_{\text{nemusí jít k } 0 \text{ pro } k,h\to 0}$$

Schéma není konzistentní!:

$$(+) = \frac{2a - a - a^3\lambda^2}{1+a^2\lambda^2} = a\,\frac{1-a^2\lambda^2}{1+a^2\lambda^2}$$

Schéma je konzistentní, pokud se omezíme na $|a\lambda| = 1$.