Úvod do PDR

poznámky přednášejícího

Petr Kaplický

2018

Používejte s rozmyslem. Text neprošel žádnou odbornou revizí.

Známé obsahové chyby je možné nalézt na webu autora:

www.karlin.mff.cuni.cz/~kaplicky/pages/pages/2018l/nmma339.php

Přednáška 1   **1. Úvod**

Co je to parciální diferenciální rovnice?

Rovnice, která obsahuje jako neznámou funkci 2 nebo více ~~proměn~~ proměnných a některé z jejích parciálních derivací!

Definice [E, T1.1.1] Buď $k \in \mathbb{N}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otevřená.

Výraz tvaru $F(\nabla^k u(x), \nabla^{k-1} u(x), \dots, \nabla u(x), u(x), x) = 0$, v Ω

nazveme PDR řádu k, pokud $F: \mathbb{R}^{n^k} \times \mathbb{R}^{n^{k-1}} \times \dots \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}$

~~Kde~~ je daná fce a $u: \Omega \to \mathbb{R}$ je hledaná neznámá fce.

0) Lineární transportní rce $\to$ $u_t + \sum_{i=1}^n b_i \partial_i u = 0$; $u: \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $b_i \in \mathbb{R}$

Příklady: 1) Laplaceova rovnice $\Delta u := \sum_{k=1}^n \partial_k^2 u = 0$; $u: \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

2) Rovnice vedení tepla: $u_t - \Delta u = 0$

$$u: (0,T) \times \Omega \to \mathbb{R}, \ \Omega \subset \mathbb{R}^n$$

3) Vlnová ~~rovnice~~ $u_{tt} - \Delta u = 0$

$$u: \underset{t}{(0,T)} \times \underset{x}{\Omega} \to \mathbb{R}; \ \Omega \subset \mathbb{R}^n$$

4) $\operatorname{arctg}(\partial_1 u + \lg \partial_2 u) + \cos \Delta u = 0$

(bez jména)

Pozn: Neexistuje jednotná teorie PDR (jako v ODR), PDR jsou bohatější systém a je potřeba si dobře vybírat, které rovnice chceme studovat (volíme ty, které se objevují v F, EK, B, CH...)

Označení: Je-li $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ot., $u: \Omega \to \mathbb{R}$ značíme

$\partial_i u$ parciální derivaci u dle x_i

$\nabla u = (\partial_1 u, \dots, \partial_n u)$ gradient.

Je-li $U: \Omega \to \mathbb{R}^d$

$\operatorname{div} U = \partial_1 U_1 + \dots + \partial_n U_n$

Je-li $u: (0,T) \times \Omega \to \mathbb{R}$

$\partial_t u$ označuje derivaci podle 1. proměnné

∇u gradient podle proměnných z Ω

Cvičení: Ukažte, že pro $u: \Omega \to \mathbb{R}$ platí $\nabla u: \Omega \to \mathbb{R}^n$ a

$\operatorname{div} \nabla u = \Delta u$

Odvození transportní rovnice – viz Novoschilov 2

Odvození vlnové rovnice – viz –//–

Odvození RVT – viz Novoschilov 9

Laplaceova – Poissonova rce je stacionární verze RVT a VR.

Připomenutí

Definice

a) PDR je lineární, lze-li ji zapsat ve tvaru.

(1) $$\sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha D^\alpha u = f$$

kde $a_\alpha = a_\alpha(x)$, $f = f(x)$ jsou dané fce. Je-li $f=0$ mluvíme, že PDR je homogenní. Pokud $a_\alpha \in \mathbb{R}$ říkáme že (1) je lineární PDR s konstantními koeficienty.

b) semilineární: $$\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha D^\alpha u + b = 0$$

kde $a_\alpha = a_\alpha(x)$ a $b = b(x, u, \nabla u, \dots, \nabla^{m-1} u)$

c) kvazilineární $$\sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha D^\alpha u + f = 0, \text{ kde}$$

$$a_\alpha = a_\alpha(x, u, \nabla u, \dots, \nabla^{m-1} u)$$
$$f = f_\alpha(\; -\|- \;)$$

Pozn.: Dále se budeme soustředit hlavně na (semi)lineární problémy.

- Transportní rovnice, RVT, VR, Laplaceova/Poissonova rce jsou lineární.

Jaké otázky si budeme klást k zadané PDE?

1) Má problém řešení?

2) Je řešení jednoznačné?

3) Závisí řešení spojitě na datech úlohy?

korektní

1) – 3) ⇒ Problém je ~~dobře~~ zadaný podle Hadamarda.

Hadamard Jacques (1902) Sur les problèmes aux dérivées partielles et leur signification physique. Princeton University Bulletin. p. 49-52.

— Konec 1. přednášky

Ad 1) Co to znamená řešení?

→ Klasické řešení. Existují všechny derivace, které v rovnici vystupují a rovnost platí ve všech bodech.

→ Analytické řešení + mnoho analytické

→ slabé řešení: řešení nemusí být spojité a rovnost nemusí platit všude v Ω, místo ní platí pouze jakési integrální vztahy.

$\Rightarrow \begin{cases} \text{Zde dále klasické řešení (většina)} \\ \text{Slabé řešení PDR I a II.} \end{cases}$

ad 2) Je potřeba zadat okrajové & počáteční podmínky.

Př: $u(x) = 0$

$u(x) = 1$ řeší RVT v $(0,T)\times\mathbb{R}^n$

Přidáme počáteční podmínku:

$$\left.\begin{aligned} &u(0,x) = u_0(x)\ ;\ u_0(x) \text{ dáno } x\in\mathbb{R}^n \\ &u_t(t,x) - \Delta u(t,x) = 0 \quad v\ (0,T)\times\mathbb{R}^n \end{aligned}\right\} \text{Cauchyova úloha}$$

Je řešení jednoznačné?

Neumí být! Př: Tichonov: Pro úlohu nahoře uvažme $u_0 = 0$. Pak $u(t,x) = 0$ je řešení. Existuje netriviální (klasické) řešení?

Ano: Tichonov (1935) Matematičeskij sbornik 43, Nr. 2

ve tvaru: $u(x,t) = F(t) + x\,F_1(t) + \frac{x^2}{2!}F'(t) + \frac{x^3}{3!}F_1'(t) + \dots$

ad 3) Pokud $\Omega \neq \mathbb{R}^n$ je potřeba zadat ještě okrajovou podmínku:

např. Dirichletova okrajová podmínka

$$u(t,x) = U(t,x) \quad na\ (0,T)\times\partial\Omega$$

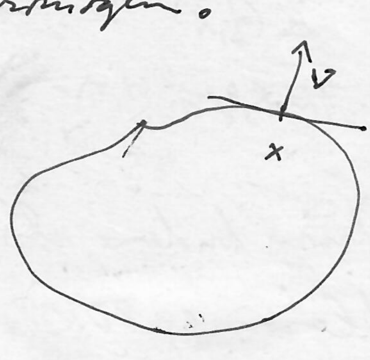
(U je zadáno)

Pokud $U \equiv 0$ říkáme, že okrajová podm. je homogenní.

např. $\nabla u\cdot\nu(t,x) = U(t,x)$ na $(0,T)\times\partial\Omega$

ν je vnější normála k Ω jednotková

(Neumannova okr. podm.)



+ další varianty např. smíšené b.c.

Ad 3b)

Uvažme nyní homogenní Dirichletovy hr. p. $u(t,x) = 0$ na $(0,T)\times\partial\Omega \ni (t,x)$

a počáteční podmínku $u(0,x) = u_0(x)$ $x \in \Omega$

Má-li být řešení spojité je nutné předpokládat, že

$u_0(x) = 0$ na $\partial\Omega$

Těm jsou takzvané podmínky kompatibility.

Ad 3: Spojitá závislost na datech. V jakém prostoru?

Nemusí platit i u rozumně vypadajících úloh

Př: Hadamard: Uvažme rovnici

$$\partial_t^2 u + \partial_x^2 u = 0 \text{ v } (0,T)\times\left(-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}\right)$$

s poč. podm.: $\left.\begin{aligned} u(0,x) &= 0 \\ \partial_t u(0,x) &= e^{-\sqrt{n}}\cos(nx) \end{aligned}\right\}\ x\in\left(-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}\right)$

a okrajovou podm.: $u(t,x) = 0$, $(t,x)\in(0,T)\times\partial\Omega$

Řešení je $u_n(t,x) = \frac{1}{n} e^{-\sqrt{n}} \cos(nx) \sinh(tn)$

Přitom $u_n(0,x) = \frac{1}{n} e^{-\sqrt{n}} \cos nx \cdot 0 = 0$

$\partial_t u_n(0,x) = \frac{1}{n} e^{-\sqrt{n}} \cos(nx)\cdot n \longrightarrow 0$ as $n \to +\infty$

$u_n(t,x) \xrightarrow{n\to+\infty} +\infty$ pro pevné x, t

Protože $\partial_t u_n(t,x) = \dots$

V dalším budeme uvažovat obvykle ? problémy:

Problém: 1) PDR

2) Počáteční podmínka a/nebo okrajová podmínka.

Zajímá nás: Je problém [redacted] korektně zadaný?

Jak vypadá řešení – ex. explicitní formule?

Metoda ~~Definice~~:

Př: Transportní rce: klasické řešení Cauchyovy úlohy

Obecně ne → numericky:

V této přednášce: Metoda konečných diferencí.

Hlavní idea: derivace nahrazujeme diferenčními podíly

$$u: [redacted]\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\ ;\ x \in \mathbb{R}\ ;\ h>0$$

$$\partial_1 u(x) \sim \frac{u(x+he_1)-u(x)}{h} \qquad e_1=(1,0,\dots,0)$$

Je-li $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$

$$\left|\partial_1 u(x) - \frac{u(x+he_1)-u(x)}{h}\right| \le \|\nabla^2 u\|_\infty h.$$

jiné možnosti approximace:

$$\partial_1 u(x) \sim \frac{u(x)-u(x-he_1)}{h}$$

$$\sim \frac{u(x+\frac{h}{2}e_1) - u(x-\frac{h}{2}e_1)}{h}$$

$$\sim \frac{u(x+he_1) - u(x-he_1)}{2h}$$

Definice: Buď dáno $h>0$, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

dopředná diference $\Delta_+ f(x) = f(x+h) - f(x)$

zpětná diference $\Delta_- f(x) = f(x) - f(x-h)$

centrální diference s dvojnásobnou délkou intervalu: $\Delta_0 f(x) = \frac{1}{2}\left(f(x+h) - f(x-h)\right)$

Centrální diference $\delta f(x) = f(x+h/2) - f(x-h/2)$

Věta [P:Ř: 11.2.26] Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ ot. konvexní, $f \in C^{(p+1)}(G)$, $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$a, x \in G$. Potom ex. $c \in [a,x]$ tak, že

$$f(x) = T_p^{f,a}(x) + \frac{1}{(p+1)!} f^{(p+1)}(c)(x-a, \dots, x-a).$$

Pro aproximaci 2. derivace ~~[illegible]~~ máme

$$\partial_1^2 f(x) \sim \frac{\delta^2 f(x)}{h^2} = \frac{f(x+he_1) - 2f(x) + f(x-he_1)}{h^2} = \frac{\Delta_+ \Delta_- f(x)}{h^2}$$

$$= \frac{\Delta_- \Delta_+ u(x)}{h^2}.$$

Opět Taylorova věta: platí pro $u \in C^3(\mathbb{R}^n)$; $x \in \mathbb{R}^n$, $h > 0$

$$\left| \partial_1^2 u(x) - \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} \right| \leq \| D^3 u \|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \cdot h$$

Dk: $$\left| \partial_1^2 u(x) - \frac{u(x+h) - u(x) - (u(x) - u(x-h))}{h^2} \right| =$$

$$\left| \partial_1^2 u(x) - \frac{\partial_1 u(x+h+\xi) - \partial_1 u(x+\xi)}{h} \right| = \qquad (\xi \in (-h,0))$$

$$= \left| \partial_1^2 u(x) - \partial_1^2 u(x+\xi+\zeta) \right| = \qquad (\zeta \in (0,h))$$

$$= \left| \partial_1^3 u(X) \right| \qquad X \in (x, x+\xi+\zeta) \subset [x-h, x+h]$$

$\perp$

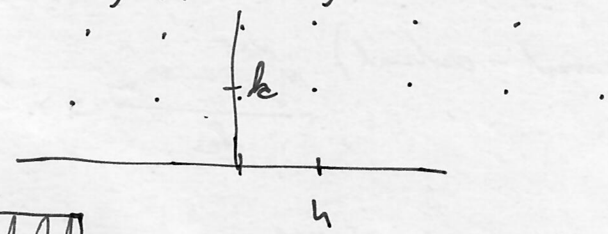
Příklad: a) Transportní rovnice [Str, Section 1.3]

~~Wir stand~~ Hledáme řešení $u:(0,+\infty)\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ rovnice, kde $t\in(0,+\infty)$, $x\in\mathbb{R}$

$$u_t + a u_x = 0 \quad \text{v } (0,+\infty)\times\mathbb{R} \qquad \text{PDR}$$

$$u(0,x) = u_0(x)\ ;\ x\in\mathbb{R} \qquad \text{počáteční podm.}$$

Zvolíme $h, k > 0$. Definujeme $t_n := kn$, $x_m := hm$, $n\in\mathbb{Z}$



Předpokládáme, že ex. hladké řešení.

Označme $u_m^n := u(t_n, x_m)$

Aproximujeme derivace v rovnici pomocí diferencí a dostáváme následující schémata:

(forward time – forward space)
$$\frac{u_m^{n+1}-u_m^n}{k} + a\,\frac{u_{m+1}^n - u_m^n}{h} = 0$$

(forward – backward)
$$\frac{u_m^{n+1}-u_m^n}{k} + a\,\frac{u_m^n - u_{m-1}^n}{h} = 0$$

(forward – central)
$$\frac{u_m^{n+1}-u_m^n}{k} + a\,\frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} = 0$$

(leap – frog)
$$\frac{u_m^{n+1}-u_m^{n-1}}{2k} + a\,\frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} = 0$$

(Lax – Friedrichs)
$$\frac{u_m^{n+1}-\frac{1}{2}\left(u_{m+1}^n + u_{m-1}^n\right)}{k} + a\,\frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} = 0$$

konec 2. přednášky

Postup řešení:
- Chybí okrajové podm. (pomineme)
- vše jsou explicitní schémata – ze znalosti aproximací $n-1, n-2, \ldots$ – vypočítáme vrstvu n
- kromě (leap – frog) jsou 1. krokové, leap frog 2 krokové schéma. problém s inicializací

Parabolic eqn. - RVT [Shi, Sec 6.3]

Řešíme $u_t = a\Delta u$ v $(0,+\infty)\times\mathbb{R}$

$u(0,x) = u_0(x)$ $\quad x\in\mathbb{R}$ $\quad u_0$ dáno

S využitím značení máme:

(forward - central)
$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{k} = a\,\frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2}$$

$$\sim \quad u_m^{n+1} = \frac{ak}{h^2}\,u_{m-1}^n + u_m^n\left(1 - \frac{2ak}{h^2}\right) + \frac{ak}{h^2}\,u_{m-1}^n$$

$$u_m^0 = u_0(mh)$$

Vlnová rce [Shi, Sec. 8.2]

$$u_{tt} = a^2\Delta u$$

$$\left.\begin{aligned} u(0,x) &= u_0(x) \\ u_t(0,x) &= u_1(x) \end{aligned}\right\} x\in\mathbb{R} \qquad u_0, u_1 \text{ dáno}$$

$$\frac{u_m^{n+1} - 2u_m^n + u_m^{n}}{k^2} = a^2\,\frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2}$$

$$u_m^0 = u_0(hm)$$

$$u_m^1 = u_m^0 + k\,u_1(mh) + \frac{1}{2}a^2k^2\left(u_{m+1}^0 - 2u_m^0 + u_{m-1}^0\right)$$

Laplaceova rce $\quad \Delta u = 0$ v Ω $\qquad \Omega\subset\mathbb{R}^2$

$$u = u_0 \text{ na } \partial\Omega$$

$$u_m^{n+1} - 2u_m^n + u_m^{n-1} = u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n$$

! Problém: Hadamard - zadání při. podm. - nestačí, i pokud obejdeme

není explicitní metoda

Klasické metody řešení PDR

1) Rozvoj do mocninné řady: Př:

$$u_t + a u_x = 0$$

u hledáme ve tvaru: $u(t,x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} a_{kj}\, t^k x^j$

dosadíme: $$\sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} a_{kj}\, k\, t^{k-1} x^j + a \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} a_{kj}\, j\, t^k x^{j-1} = 0$$

posuneme indexy: $$\sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} \left(a_{(k+1)j}(k+1) + a\, a_{k(j+1)}(j+1) \right) t^k x^j = 0$$

$\Rightarrow \forall j,k \in \mathbb{N}_0 : \quad a_{(k+1)j}(k+1) = -a\, a_{k(j+1)}(j+1)$

Jak začít? $u(0,x) = u_0(x) = \sum_{j=0}^{+\infty} a_{0j}\, x^j$ Taylorova řada u_0.

$\Rightarrow \forall j \in \mathbb{N}_0 : \; a_{0j}$ dáno.

$\Rightarrow \; a_{1j} = -a\, a_{0(j+1)}(j+1)$

$$\Rightarrow \; a_{(k+1)j} = -a \frac{j+1}{k+1} a_{k(j+1)} = (-a)^2 \frac{j+1}{k+1} \frac{j+2}{k} a_{(k-1)(j+2)}$$

$$= (-a)^{k+1} \frac{j+1}{k+1} \frac{j+2}{k} \frac{j+3}{k-1} \cdots \frac{k+j+1}{1} a_{0(j+k+1)}$$

$$= (-a)^{k+1} \frac{(k+1+j)!}{(k+1)!\, j!} a_{0(j+k+1)} = (-a)^{k+1} \binom{k+1+j}{k} a_{0(j+k+1)}$$

$$\Rightarrow \; a_{kj} = (-a)^k \binom{k+j}{k} a_{0(k+j)} = (-a)^k \binom{k+j}{j} a_{0(k+j)}$$

$$u(t,x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} (-a)^k \binom{k+j}{k} a_{0(k+j)}\, t^k x^j = \left| \begin{matrix} k+j = m \\ k = k \end{matrix} \right| =$$

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{m} (-a)^k \binom{m}{k} t^k x^{m-k} \right) a_{0m} = \sum_{m=0}^{+\infty} (x-at)^m a_{0m} = u_0(x-at)$$

→ Věta Cauchy–Kovalevské → obecná – jednotný přístup ke "všem" rovnicím

ale pouze pro analytická data – rozvinutelná do mocninných řad

[Evans, Kapitola 4.6]

2) ~~[illegible]~~ Transformace nezávislé proměnné

Vyřešíme výše provedenou záměnou proměnných

$$\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} y \\ s \end{pmatrix} \qquad u(x,t) = \mathcal{U}(y,s) = \mathcal{U}(x-at,t)$$

$$y = x - at$$

$$\partial_t u = -a\,\partial_1 \mathcal{U} + \partial_2 \mathcal{U}$$

$$\partial_x u = \partial_1 \mathcal{U}$$

dosadíme: $\partial_2 \mathcal{U} = 0$ tedy $\mathcal{U}$ nezávisí na 2. proměnné

obecné řešení je $\mathcal{U}(x-at)$

dosadíme poč. podm.: $\mathcal{U}(x) = u_0(x) \Rightarrow$ řešení je $u_0(x-at)$

Obecněji: $y = \varphi(x,t)$, $s = \psi(x,t)$

$$\partial_t u = \partial_2 \varphi\, \partial_1 \mathcal{U} + \partial_2 \psi\, \partial_2 \mathcal{U}$$

$$\partial_x u = \partial_1 \varphi\, \partial_1 \mathcal{U} + \partial_1 \psi\, \partial_2 \mathcal{U}$$

dosadíme: $\partial_t u + a\,\partial_x u = (\partial_2 \varphi + a\,\partial_1 \varphi)\,\partial_1 \mathcal{U} + (\partial_2 \psi + a\,\partial_1 \psi)\,\partial_2 \mathcal{U} = 0$

a nevede to dál. Smysl je: stačí nalézt 1 řešení transportní rce a[illegible] lokalitě.

3) Snaha o převedení rce na jednodušší tvar:

$u_t + a u_x = 0$ vypadá jako T.1. rce složené pro

$$[u(\varphi(s),\psi(s))]' = \varphi'\partial_1 u + \psi'\partial_2 u = \varphi'\partial_t u + \psi'\partial_x u$$

Chceme: $\varphi'(s) = 1$, $\psi'(s) = a$ $\Rightarrow$ Charakteristika

$$\Rightarrow \varphi(s) = s+\alpha,\ \psi(s) = as+\beta \qquad \underset{(s+\alpha,}{t=}\ \underset{as+\beta)}{x=}$$

$\Rightarrow$ u musí být konstantní na přímkách $(\ldots)$, $s \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow u(t,x) = u(s+t, as+x) = u(0, -at+x) = u(0, \ldots) = u(0, x-at) = u_0(x-at)$$

$as+\beta = t$, $s = 0$, $\forall s \in \mathbb{R}$

$s+\alpha = x$, $as+t=0$

$s = -\frac{t}{a}$

Konec 3. lekce

4) Projekce na vlastní bázi prostoru. Fourierova metoda separace proměnných.

$$\partial_t u - \partial_x^2 u = 0 \quad \text{v } (0,T)\times(0,\pi)$$

$$u = 0 \quad x=0 \text{ nebo } x=\pi$$

$$u(0,x) = u_0 \quad t=0$$

Najdeme vl. č. operátoru $-\partial_x^2$ s Dirichletovou b.c.

(Sturm-Liouville): $\varphi_n(x) = \sin(nx)$, $\lambda_n = n^2$, $n \in \mathbb{N}$ OG báze $L^2(0,\pi)$

ODR

Projekce $n\in\mathbb{N}$: značíme $\int_0^\pi u(x,t)\varphi_n(x)\,dx = u_n(t)$. Pak

$$\left.\begin{aligned} \partial_t u_n + n^2 u_n &= 0 \\ u_n(0) &= (u_0)_n \end{aligned}\right\} \quad u_n(t) = (u_0)_n e^{-n^2 t}$$

Hledané řešení je tedy: $u(t,x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (u_0)_n e^{-n^2 t} \sin(nx)\frac{2}{\pi}$; $(u_0)_n = \int_0^\pi u_0(x)\sin(nx)\,dx$, má-li vše smysl.

5) Transformace rovnice:

Fourierova transformace:

$$\hat{u}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega x}\, u(x)\,dx$$

$$\check{v}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega x}\, v(\omega)\,d\omega$$

Pro u z $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ platí $u = \check{\hat{u}} = \hat{\check{u}}$.

Navíc: $\widehat{\partial_x u}(\omega) = i\omega\,\hat{u}(\omega)$

$$e^{i\alpha\omega}\,\hat{u}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(\omega)(x-\alpha)}\, u(x-\alpha+\alpha)\,dx$$

$$= \widehat{u(\cdot+\alpha)}(\omega).$$

Použij FT dle x na transportní rovnici:

$$\partial_t \hat{u} + ai\omega \underset{\uparrow \atop (t,\omega)}{\hat{u}} = 0 \Rightarrow \hat{u}(t,\omega) = e^{-ia\omega t}\,\alpha(t)$$

při podm.: $\hat{u}(0,\omega) = \hat{u}_0(\omega)$ $\Rightarrow \alpha(t) = \hat{u}_0(\omega)$

Tedy: $\hat{u}(t,\omega) = e^{-ia\omega t}\,\hat{u}_0(\omega) = \widehat{u_0(\cdot - at)}(\omega)$

Inverzní FT: $u(t,x) = u_0(x - at)$

Bez řešení rovnice dokážeme

$$\|u(t,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|\hat{u}(t,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|\hat{u}_0(\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R})}$$

~~Stabilita~~, Problém dobře zadán.

Jednoznačnost řešení:

Díky linearitě stačí ukázat, že problém s nulovými daty má pouze nulové řešení.

$$\partial_t u + a\partial_x u = f \qquad \partial_t v + a\partial_x v = f$$
$$u(0,x) = u_0(x) \qquad v(0,x) = u_0(x) \qquad x \in \mathbb{R}$$

Pak definuji $w = u - v$, které splňuje

$$\partial_t (w) + a\partial_x w = 0 \qquad t>0,\ x\in\mathbb{R}$$
$$w = 0 \qquad t = 0$$

$\Rightarrow w = 0$ a $u = v$. Řešení je jednoznačně určené.

Spojitá závislost na datech úlohy:

Pozn.: z linearity stačí ukázat, že $\|u\|_a \le c(\|f\|_b + \|u_0\|_c)$, $c>0$ nezávislé

Zde $\|\cdot\|_a, \|\cdot\|_b, \|\cdot\|_c$ jsou vhodné normy.

Pro transportní rovnici mají $\|u\|_a$ a $\|\cdot\|_c = \|\cdot\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$ $\to$ Principy maxima

$\|\cdot\|_b = \|\cdot\|_{L^\infty((0,T)\times\mathbb{R})}$

6) Duhamelův princip – jak získat řešení rovnice s nenulovou pravou stranou, pokud umíme řešit úlohu s nenulovou poč. podm.

Př: řešení rovnice transportu $\partial_t u + a\partial_x u = f$, $t>0, x\in\mathbb{R}$

$u = 0$, $t>0$

Fix $t_1 > 0$. $\forall t_0 \in (0,t)$ najdu řešení problému

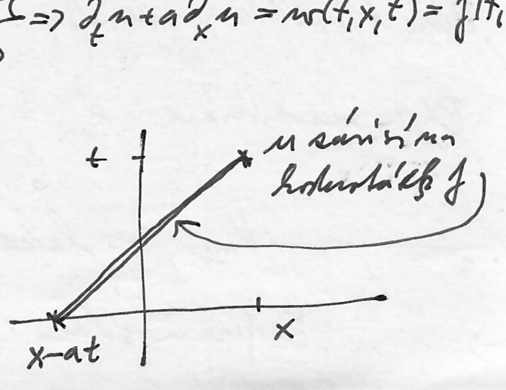
$$\left.\begin{aligned} \partial_t w + a\partial_x w &= 0 \qquad t > t_0 \\ w(t_0,x) &= f(t_0,x) \qquad x\in\mathbb{R}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{ozn. } w(t,x,t_0)$$

Definuji $u(t_1,x) = \int_0^{t_1} w(t_1,x,t_0)\,dt_0$

Pak
$$\left.\begin{aligned}\partial_t u &= w(t,x,t) + \int_0^t \partial_t w(t,x,t_0)\,dt_0 \\ \partial_x u &= \int_0^t \partial_x w(t,x,t_0)\,dt_0\end{aligned}\right\} \Rightarrow \partial_t u + a\partial_x u = w(t,x,t) = f(t,x)$$

Tedy hledané řešení transportní rce s pravou stranou je

$$u(t,x) = \int_0^t f(t_0, x - a(t-t_0))\,dt_0$$



2. Analýza numerických schémat

Pojmy: konvergence, konzistence, stabilita, Lax-Richtmyer Ekvivalence věta

[Stri, I 1.4]

Základní vyžadovaná vlastnost numerických metod je, že aproximují řešení a tato aproximace se zlepšuje pro $k, h \to 0$.

V této sekci budeme uvažovat rovnici

$$P(\partial_t, \partial_x)\, u = f(t,x) \qquad (1)$$

Kde P je polynom 1. stupně v 1. proměnné. Příklady pro

$P(\alpha,\beta) = \alpha + b\beta^2 + a\beta$ pro $a,b\in\mathbb{R}$ $\to$ $\partial_t u - b\,\partial_x^2 u + a\,\partial_x u = 0$ (vedení tepla)

Viz př. dole další str.

$P(\alpha\beta) = \alpha + a\beta$ $\to$ $\partial_t u + a\,\partial_x u = 0$ (transport)

~~Předpokládáme, že~~

Počáteční podmínka: $u(0,x) = u_0(x)$ $x\in\mathbb{R}$ (2)

Předpokládáme, že problém (1)&(2) má jednoznačně určené řešení.

KONVERGENCE

Definice: Jednokrokové schéma aproximující (1) &(2) nazýváme konvergentní, pokud pro každé řešení (1)&(2) (označme ho u) a každé řešení numerického schématu (označme v_m^n), které splňuje že $v_m^0 \to u_0(x)$ pro $mh \to x$ platí:

$$v_m^n \to u(t,x) \text{ pro } nk \to t,\ mh \to x \text{ pro } (k,h)\to(0,0)$$

Pozn. nejedn… se o bodov…

Konvergenci - je potřeba vyjasnit…

Může být obtížné ověřit. Proto zavedeme další pojmy.

Chyba aproximace: $e_m^n = v_m^n - u(t_n, x_m)$ .. Má jít k 0 pro $(t_n, x_m) \to (t,x)$.

— Konec 4. lekce —

Diferenční schéma: $P_{k,h} u = R_{k,h} f$, kde $P_{k,h} u(t,x) = \sum_{n=0}^{M} \sum_{m=-N}^{N} u(t-nk, x-mh)\,a$

KONZISTENCE

Def: Pro danou PDR $Pu = f$ a diferenční schéma $P_{k,h} u = R_{k,h} f$, řekneme, že diferenční schéma je konzistentní s PDR pokud pro každou hladkou funkci $\phi(t,x)$ platí v každém bodě (t,x)

$$\cancel{(R_{k,h} P\phi - P_{k,h}\phi)}\,(P_{k,h}\phi - R_{k,h} P\phi)(t,x) \longrightarrow 0 \text{ as } k,h \to 0$$

Příklad: $P = \partial_t + a\partial_x$ transportní rce

$R_{k,h} f = f^n_m$, $\quad P_{k,h} u(\phi) = \dfrac{\phi^{n+1}_m - \phi^n_m}{k} + a\,\dfrac{\phi^n_{m+1} - \phi^n_m}{h}$ (forward-forward)

$P_{k,h}$ vnímáno spojitě: $P_{k,h}\phi(t,x) = \dfrac{\phi(t+k,x) - \phi(t,x)}{k} + a\,\dfrac{\phi(t,x+h) - \phi(t,x)}{h}$

S využitím Taylorova vzorce přitom: /Lagrange/

$$(P\phi - P_{k,h}\phi)(t,x) = \partial_t\phi(t,x) - \partial_t\phi(t+\vartheta,x) + a\big(\partial_x\phi(t,x) - \partial_x\phi(t,x+\xi)\big)$$

pro j. $\vartheta \in (0,k)$, $\xi \in (0,h)$

$$= -\partial^2_{tt}\phi(t+\alpha\vartheta,x)\cdot\vartheta - a\,\partial^2_x\phi(t,x+\beta\xi)\,\xi \quad \text{pro } \alpha,\beta \in (0,1)$$

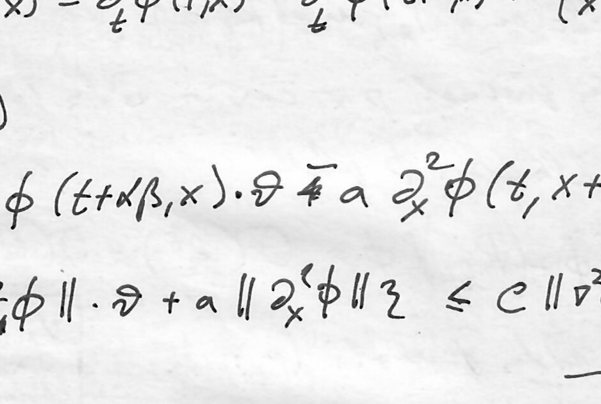
$$|-\|-| \le \|\partial^2_{tt}\phi\|\cdot\vartheta + a\|\partial^2_x\phi\|\,\xi \le C\|\nabla^2\phi\| \max(k+h)$$

$$\longrightarrow 0 \text{ as } k,h \to 0.$$

Tedy schéma je konzistentní!

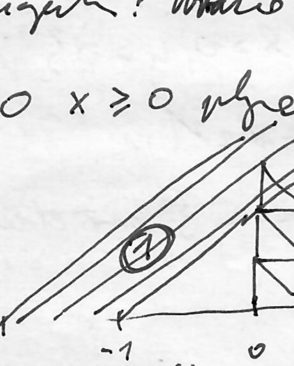
Ale schéma není konvergentní: Uvažme $a = 1$, $u_0(x) = \begin{cases} 1 & x \le -1 \\ 0 & x \ge 0 \end{cases}$ $\perp$

Z podm. $u_0(x) = 0$ $x \ge 0$ plyne $u^n_m = 0$ $\forall n > 0$,



ale přitom řešení vždy splňuje $u(t,x) = u_0(x-t) \Rightarrow u(t,x) = 1$

pro $x - t < -1$, $t > x+1$ $\perp$



Def: Buď u řešení problému $Pu = f$ (PDR) a $P_{k,h} u = R_{k,h} f$ nějaké diferenční schéma pro tuto rovnici.

Výraz $P_{k,h} u - R_{k,h} f =: \varepsilon_{k,h}(t,x)$ $\quad \left((P_{k,h} u - Pu)(t,x) \right)$

nazýváme chybou diskretizace.

Pozn: • Konzistence znamená, že chyba diskretizace $\to 0$ pro $h, k \to 0$.

• $P_{k,h} e = -\varepsilon_{k,h}$ (e - chyba aproximace)

Tedy pokud je schéma konzistentní, chceme vědět, že e je malé srovnatelně nadále.

$\boxed{\text{ŘÁD PŘESNOSTI}}$

Definice [Str, 3.1.1] Schéma $P_{k,h} u = R_{k,h} f$, které je konzistentní s PDR $Pu = f$ je řádu přesnosti p v čase a řádu přesnosti q v prostoru pokud pro každou hladkou ϕ platí

$$P_{k,h}\phi - R_{k,h} P\phi = O(h^q) + O(k^p).$$

Říkáme, že schéma je řádu přesnosti (p, q).

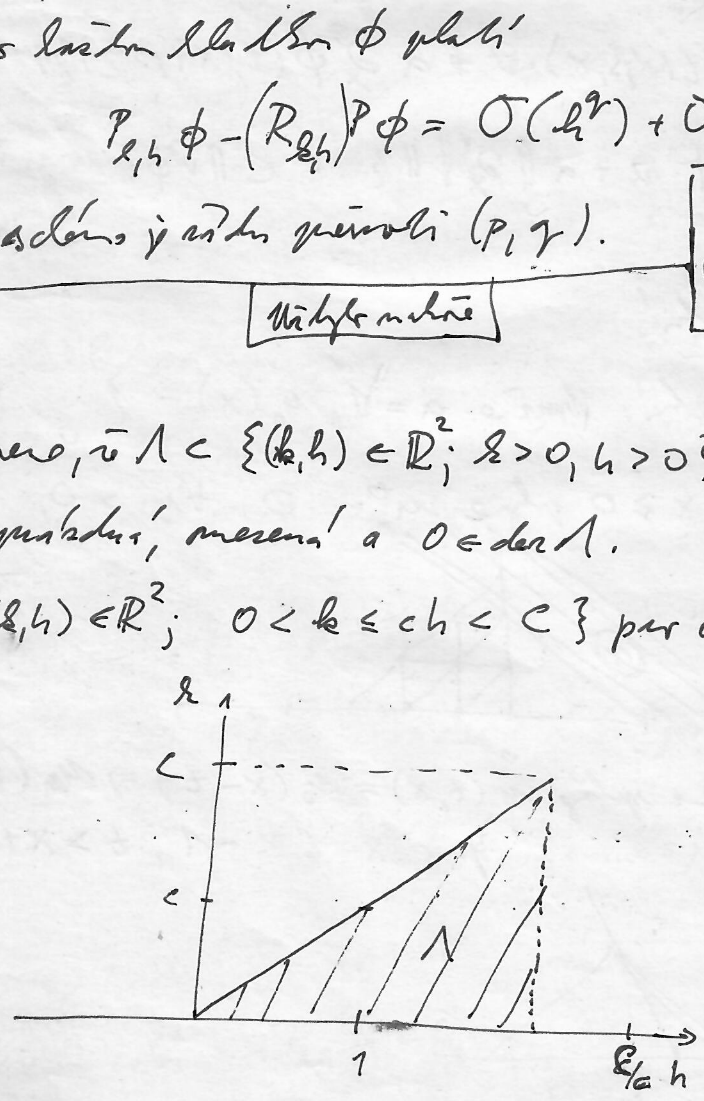
Konzistence + řád přesnosti pro (dopředná - dopředná)

Ukázky na konci

$\boxed{\text{STABILITA}}$

Definice: Řekneme, že $\Lambda \subset \{(k,h) \in \mathbb{R}^2;\ k>0,\ h>0\}$ je oblast stability pokud Λ je neprázdná, omezená a $0 \in \partial\Lambda$.

Př: $\Lambda = \{(k,h) \in \mathbb{R}^2;\ 0 < k \leq ch < C\}$ pro daná $c, C > 0$.



Definice: [Str, 15.1] Schéma $P_{k,h} v^n_m = 0$ pro PDR 1. řádu v t je stabilní ve oblasti stability Λ pokud ex. $J \in \mathbb{N}$ tak, že

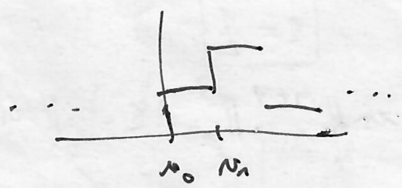
$$\underbrace{\forall T>0, \exists C_T>0,}_{\forall k,h\in\Lambda,\ \forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\};\ 0\le nk\le T} : h\sum_{m=-\infty}^{+\infty}|v_m^n|^2 \le C_T h \sum_{j=0}^{J}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}|v_m^j|^2 .$$

Říkáme, že schéma $P_{k,h}v = R_{k,h}f$ je stabilní v oblasti stability Λ pokud $P_{k,h}v=0$ je stabilní v oblasti stability Λ.

Pozn: 1) $\sum_{m=-\infty}^{+\infty}|v_m^n|^2 = \|v^n_\cdot\|_{\ell_2}^2$

0) Stabilita pro nelineární problémy motivovaná Duhamelovým principem.

2) Definujme $V(x) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} v_m^n \cdot \chi_{(mh,(m+1)h)}$ (konečná suma $\forall x\in\mathbb{R}$)



Pak $\|V\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = h\|v^n_\cdot\|^2_{\ell_2}$

3) Budeme potřebovat lepší vnoření než je V založené na F. řadách.

Př: $\frac{u^{n+1}_m - u^n_m}{k} + a\frac{u^n_{m+1}-u^n_m}{h} = 0$ pro rce $\partial_t u + a\partial_x u = 0$

$$P_{k,h}\phi(t,x) = \frac{\phi(t+k,x)-\phi(t,x)}{k} + a\frac{\phi(t,x+h)-\phi(t,x)}{h} = 0$$

Pokud $\phi\in C^2(U(t,x))$: $\phi(t+k,x) = \phi(t,x)+\partial_t\phi(t,x)k + O(k^2)$

$$\phi(t,x+h) = \phi(t,x)+\partial_x\phi(t,x)h+O(h^2)$$

$$P\phi - P_{k,h}\phi = \partial_t\phi + a\partial_x\phi - \left(\partial_t\phi(t,x)+O(k)+a\partial_x\phi(t,x)+O(h)\right)$$

$= O(k)+O(h)$ a tedy schéma je konzistentní

$(R_{k,h}f)^n_m = f(kn,hm)$ => schéma je řádu přesnosti 1 v prostoru a řádu přesnosti 1 v čase.

Příklad: Stabilita (forward - forward) schématu.

Schéma je:

$$u_m^{n+1} = -\frac{ak}{h}\left(u_{m+1}^n - u_m^n\right) + u_m^n = u_m^n(1+a\lambda) - a\lambda\, u_{m+1}^n$$

s označením $\lambda = \frac{k}{h}$

$$a\cdot b = \sqrt{\varepsilon}\, a\, \frac{b}{\sqrt{\varepsilon}} \le \frac{\varepsilon a^2}{2} + \frac{b^2}{2\varepsilon}$$

Vyjádřit u_m^{n+1} a použij Younga

$$|u_m^{n+1}|^2 \le \varepsilon |u_m^{n+1}|^2 + \left(|u_m^n|^2(1+\lambda)^2 + |u_{m+1}^n|^2\lambda^2\right)\frac{1}{2\varepsilon}$$

$\boxed{\varepsilon = \frac{1}{2}}$

$$\frac{1}{2}\|u^{n+1}\|_{\ell^2}^2 \le \|u^n\|_{\ell^2}^2\left((1+\lambda)^2 + \lambda^2\right)$$

$$\le \|u^0\|_{\ell^2}^2\left[(1+\lambda)^2 + \lambda^2\right]^{n+1} \quad \left(n \text{ je max. } \frac{T}{k}\right)$$

$\left[(1+\lambda)^2 + \lambda^2\right]^{n+1}$ je omezené pro $|(1+\lambda)^2 + \lambda^2| \le 1$.

Jiný přístup:

$$|u_m^{n+1}|^2 \le \left(u_m^n(1+a\lambda) - a\lambda\, u_{m+1}^n\right)^2 = |u_m^n|^2(1+a\lambda)^2 - 2\lambda(1+a\lambda)\,u_m^n u_{m+1}^n$$

$$(a\lambda)^2|u_{m+1}^n|^2 \le (1+a\lambda)^2|u_m^n|^2 + 2|a\lambda||1+a\lambda||u_m^n||u_{m+1}^n| + |a\lambda|^2|u_{m+1}^n|^2$$

$$\le (1+a\lambda)^2|u_m^n|^2 + |a\lambda||1+a\lambda|\left(|u_m^n|^2 + |u_{m+1}^n|^2\right) + |a\lambda|^2|u_{m+1}^n|^2$$

Sečtu přes $m \in \mathbb{Z}$

$$\|u^{n+1}\|_{\ell^2}^2 \le \|u^n\|_{\ell^2}^2\left((1+a\lambda)^2 + 2|a\lambda||1+a\lambda| + |a\lambda|^2\right) = \|u^n\|_{\ell^2}^2\left(|1+a\lambda| + |a\lambda|\right)^2$$

Pro schéma $u_m^{n+1} = a u_m^n + b u_{m+1}^n$

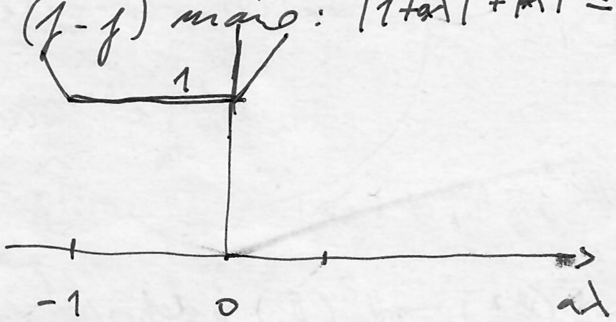
dostaneme hlavně postupem: $\|u_\cdot^{n+1}\|_{\ell^2} \le \|u_\cdot^n\|_{\ell^2} (|a|+|b|)$

$$\le (|a|+|b|)^{n+1} \|u_\cdot^0\|_{\ell^2}$$

Platí tedy: $|a|+|b| \le 1 \Rightarrow$ stabilita schématu

~~Celkem vyjádření pomocí tzv. Von Neumannovy analýzy, že tato podmínka stability je také nutná!~~

Pro schéma (f-f) máme: $|1+a\lambda| + |a\lambda| \le 1$



$\Rightarrow a\lambda \in [-1, 0]$

tzn:

Nutnost von Neumanna

$-1 \le a\lambda \le 0 \Rightarrow$ (f-f) schéma je stabilní!

Stručně von Neumanna!

Definice: [Sti 1.5.2] Cauchyova úloha pro PDR 1. řádu je dobře podmíněná, pokud

$\forall T>0, \exists C_T>0, \forall$ klasické řešení $\forall t \in (0,T)$: $\int_{\mathbb{R}} |u|^2(t,x)\,dx \le C_T \int_{\mathbb{R}} |u_0(x)|^2\,dx$

Př: Transportní rovnice $u_t + a u_x = 0$ v $(0,+\infty)\times\mathbb{R}$

$u(0) = u_0$

Řešení je $u(t,x) = u_0(x-at)$ a tedy

$$\|u(t,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R})}$$

$\Rightarrow$ úloha je dobře podmíněná.

Věta (Lax-Richtmyer ekvivalence theorem):

$Pu = 0$ 1. řádu v t.

Uvažme Cauchyovu úlohu pro (lineární PDR) rovnici 1. řádu, která je dobře zadaná!

Buď $P_{k,h}u = 0$ s ní konzistentní (jednokrokové) diferenční schéma.

Pak

Schéma $P_{k,h}$ je konvergentní právě, když je stabilní.

Př: schéma (j-j) pro transportní rovnici je konvergentní právě, když

$$a\frac{k}{h} \in [-1, 0].$$

$T: L^2(\mathbb{R}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$

$v \in L^2(\mathbb{R}): v(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} \hat{v}(\xi)\, d\xi$

$Tv_m := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} e^{ihmx} \hat{v}(\xi)\, d\xi$

$\widehat{Tv} = \hat{v}$ na $(-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h})$

Pak:

Ke konvergenci (Pouze případ $x \in \mathbb{R}$)

Definice: Interpolační operátor $S: \ell^2(h\mathbb{Z}) \to L^2(\mathbb{R})$ je definován:

Pro $v \in \ell^2(h\mathbb{Z})$ definujeme

$$\hat{v}(\xi) = \frac{h}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-imh\xi} v_m \quad ; \quad \hat{v} \in L^2\left(-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}\right)$$

a

$$Sv(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} e^{ix\xi} \hat{v}(\xi)\, d\xi.$$

$\|v\|_{\ell^2_h} = \|\hat{v}\|_h = \|Sv\|_{L^2(\mathbb{R})}$

Pozn: Parsevalova rovnost říká: $\sqrt{h}\|v\|_{\ell^2} = \|\hat{v}\|_{L^2(-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h})} = \|Sv\|_{L^2(\mathbb{R})}$

$Pu = 0$ v $(0,+\infty) \times \mathbb{R}$, $u(0) = u_0$ v $\mathbb{R}$.

Definice: Schéma pro homogenní počáteční úlohu je konvergentní, pokud

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0; \forall k < \delta, h < \delta, \|Sv^0 - u_0\|_{L^2(\mathbb{R})} < \delta, (k,h) \in \Lambda,$$

$$n \in \mathbb{N}, nk \in [0,T]: \|Sv^n_{(\cdot)} - u(nk, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R})} < \varepsilon$$

Pozn: Podle věty o záměně derivování a integrálu dle parametru platí $Sv \in C^\infty(\mathbb{R})$ pro $v \in \ell^2(\mathbb{Z})$.

Opakování Fourierových řad

$\hat{} : \ell^2(\mathbb{Z}) \to L^2(-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h})$ definujeme

$$\hat{v}(\xi) = \frac{h}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} v_m e^{-imh\xi}$$

a inverzní formule

$$v_m = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} \hat{v}(\xi) e^{imh\xi} \, d\xi .$$

Pozn: $\int_{-\pi/h}^{\pi/h} |e^{imh\xi}|^2 \, d\xi = \frac{2\pi}{h}$ tedy $\left\{ \frac{\sqrt{h}\, e^{imh\xi}}{\sqrt{2\pi}} \right\}_{m \in \mathbb{Z}}$ je ON báze $L^2(-\pi/h, \pi/h)$

Parsevalova rovnost: $h \sum_{m \in \mathbb{Z}} |v_m|^2 = \|\hat{v}\|^2_{L^2(-\pi/h, \pi/h)} = \int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} |\hat{v}|^2 =: \|\hat{v}\|_h^2 =: \|v\|_h^2$

Pozn: ◦ Definice stability: podmínka je ekvivalentní

$$\|\hat{v}^n\|_h \le C_T^* \sum_{j=0}^{J} \|\hat{v}^j\|_h$$

Von Neumannova analýza

Pomocí Fourierovy transformace/řad budeme studovat stabilitu numerických schémat.

Příklad [Strik, Chap. 2, Sec. 2.2]

Stabilita (forward-forward) schéma pro $\partial_t u + a\partial_x u = 0$ pomocí

Fourierovy transformace:

schéma: $$\frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{k} + a\,\frac{v_{m+1}^n - v_m^n}{h} = 0$$

def. $\lambda = \frac{k}{h}$: $$v_m^{n+1} = v_m^n - a\lambda\left(v_{m+1}^n - v_m^n\right)$$

tj.: $$v_m^{n+1} = (1+a\lambda)v_m^n - a\lambda v_{m+1}^n$$

Provedeme FŘ: $$\widehat{v}^{n+1} = (1+a\lambda)\widehat{v}^n - a\lambda\, \widehat{v}^n_{\cdot+1}$$

$$\widehat{v}^n_{\cdot+1} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{h}{\sqrt{2\pi}}\, v_{m+1}\, e^{-imh\xi} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{h}{\sqrt{2\pi}}\, v_{m+1}\, e^{-i(m+1)h\xi}\, e^{ih\xi}$$

$$= e^{ih\xi}\,\widehat{v}^n$$

$$\Rightarrow \quad \widehat{v^{n+1}} = \left(1 + a\lambda(1 - e^{ih\xi})\right)\widehat{v^n}$$

označme $1 + a\lambda(1 - e^{ih\xi}) = g(\xi, k, h)$

iterací $\Rightarrow$ $$\widehat{v^{n+1}} = \left(g(\xi,k,h)\right)^{n+1}\widehat{v^0}$$

Parseval $$\|\widehat{v}^{n+1}\|_h \le \|g(\xi,k,h)\|_\infty^{n+1}\,\|\widehat{v^0}\|_h = \|g(\xi,k,h)\|_\infty^{n+1}\,\|v^0\|_h$$

$$\|v^{n+1}\|_h$$

Informace o stabilitě je skryta v g. Je-li $\|g(\xi,k,h)\|_\infty \le 1$,

máme stabilitu. $1 \ge (1 + a\lambda - a\lambda\cos h\xi)^2 + (a\lambda\sin h\xi)^2 \Rightarrow$

Pro (f-f) vyjádříme:

$$1 \ge 1 + a^2\lambda^2 + a^2\lambda^2\cos^2 h\xi + a^2\lambda^2\sin^2 h\xi + 2a\lambda - 2a\lambda\cos h\xi - 2a^2\lambda^2\cos h\xi$$

$$1 + 2a^2\lambda^2 + 2a\lambda - 2a\lambda\cos h\xi = 2a^2\lambda^2 + 2a(1-\cos h\xi)\lambda + 1$$
$$-2a^2\lambda^2\cos h\xi$$

$$1-\cos h\xi = 1-\cos^2\frac{h\xi}{2}+\sin^2\frac{h\xi}{2} = 2\sin^2\frac{h\xi}{2}$$

Chceme, aby:

$$0 \geq 2a^2\lambda^2\, 2\sin^2\frac{h\xi}{2} + 2a\lambda\, 2\sin^2\frac{h\xi}{2} = 4a\lambda(a\lambda+1)\sin^2\frac{h\xi}{2}$$

a) $a \leq 0$ & $a\lambda+1 \geq 0$ b) $a \geq 0$ & $a\lambda+1 \leq 0$

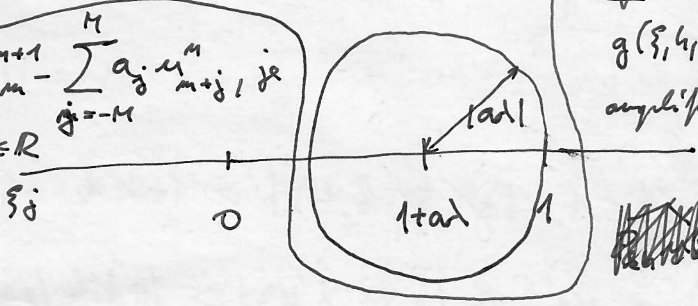
$|a\lambda| < 1$ nelze

(J-J) schéma je stabilní pro $a<0$ & $|a\lambda|<1 \iff -1 \leq a\lambda \leq 0$

Pozn: $g(\xi) := 1+a\lambda-a\lambda e^{ih\xi}$ $g(\mathbb{R})$ je sféra se středem $1+a\lambda$ a poloměrem $|a\lambda|$

Pozn: Je-li $P_{k,h}u = u^{n+1}_m - \sum_{j=-M}^{M} a_j u^n_{m+j}$, je ($a_j \in \mathbb{R}$)

$$g(\xi,k,h) = \sum_{j=-M}^{M} a_j e^{+ih\xi j}$$



Def: Buď Λ oblast stability, pro $g(\xi,k,h)$, $(k,h)\in\Lambda$, $\xi\in\mathbb{R}$ rozumíme amplifikační faktor schématu 1krokového $P_{k,h}u=f$, je-li pro $n\in\mathbb{N}$: $g(\xi,k,h)^n\,\hat{u}^n(\xi) = \hat{u}^0(\xi)$

Věta (von Neumann): Jednokrokové diferenční schéma (s konstantními koeficienty) je stabilní v oblasti stability Λ právě, když

(*) $\exists K>0$ (nezávislá na ξ, k, h), $\forall \xi\in\mathbb{R}, k>0, h>0$: $|g(\xi,k,h)| \leq 1+Kk$
$(k,h)\in\Lambda$.

Je-li g nezávislá na k, h podmínka (*) je ekvivalentní

$$\forall \xi\in\mathbb{R}, (k,h)\in\Lambda : |g(\xi)| \leq 1 .$$

Dk: [Str, Theorem 2.2.1]

"$\Leftarrow$": Máme $\|v^n\|_h^2 = \|\hat{v}^n\|_h^2 \leq \|g(\xi,k,h)\|_\infty^{2n}\|\hat{v}^0\|_h^2 \leq (1+Kk)^{2n}\|v^0\|_h^2$

Předpokládáme, že $nk \leq T$ a tedy $n \leq \frac{T}{k}$. Pak

$$(1+Kk)^{2n} \leq (1+Kk)^{\frac{T}{k}} = \exp\left(\frac{T}{k}\ln(1+Kk)\right) = \exp\left(TK\cdot\overbrace{\frac{\ln(1+Kk)}{Kk}}^{\leq 1}\right)$$

$\leq e^{TK}$ a schéma je stabilní v oblasti stability Λ

(e^{TK} nezávisí na $k, h\in\Lambda$).

Příklad:

$$f(x) := \frac{\lg(1+x)}{x} \qquad f(0+) = 1, \quad f(+\infty -) = 0$$

$$\cancel{f(0) =}$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}\cdot\frac{1}{x} - \frac{\lg(1+x)}{x^2} = \frac{1}{x^2}\Big(\underbrace{\frac{x}{x+1} - \lg(1+x)}_{h(x)}\Big)$$

$$= \frac{1}{x^2(x+1)}\big(\underbrace{x - (x+1)\lg(1+x)}_{g}\big)$$

$$h'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{x}{(x+1)^2} - \frac{1}{1+x} = -\frac{x}{(x+1)^2} < 0 \quad x > 0, \; h(0) = 0$$

$\Rightarrow f' < 0$ na $(0,+\infty)$.

Tedy $f(x) \le 1$ pro $x > 0$ a f klesající na $(0,+\infty)$.

„$\Rightarrow$“, dokážeme „$\neg \Leftarrow \neg$“:

$$\forall K > 0, \exists \xi \in \mathbb{R}, (k,h) \in \Lambda : |g(\xi,k,h)| > 1 + Kk$$

g je spojitá $\Rightarrow$ ex. $\varepsilon > 0$ ($\delta > 0$), $\forall \xi \in \mathbb{R}$ $|g(\xi,k,h)| > 1 + Kk/2 >$

Vezmi $\hat{v}^0$ tak, aby $\operatorname{supp} \hat{v}^0 \subset U(\xi,\varepsilon)$ (a $\|\hat{v}^0\|_{L^2(-\frac{\pi}{h},\frac{\pi}{h})} = 1$.)
$\hat{v}^0 \in C^\infty_{per}(-\frac{\pi}{h},\frac{\pi}{h})$

Najdi $v^0 \in l^2(\mathbb{Z})$. Pak platí $\hat{v}^1 = g\,\hat{v}^0$ a $\hat{v}^n = g^n \hat{v}^0$

$$\Rightarrow |\hat{v}^n| \ge \left(1+\frac{Kk}{2}\right)^n |\hat{v}^0| \Rightarrow \|\hat{v}^n\|_h^2 = \|v^n\|_h^2 \ge \left(1+\frac{Kk}{2}\right)^{2n} \|\hat{v}^0\|_h^2 =$$

$$= \left(1+\frac{Kk}{2}\right)^{2n} \|v^0\|_h^2$$

Tedy schéma není stabilní, protože lze volit $n > \frac{T}{2k}$ a proto

$$\left(1+\frac{Kk}{2}\right)^{\frac{2T}{2k}} = \exp\left(\frac{2TK}{2}\,\frac{\lg(1+Kk/2)}{\frac{Kk}{2}}\right) \ge$$

$$= \exp\left(2T\,\frac{\lg(1+\frac{Kk}{2})}{k}\right) \ge \exp\left(\frac{2T}{2k_0}\lg\left(1+\frac{Kk_0}{2}\right)\right),$$

je-li $\forall (k,h) \in \Lambda : k \le k_0$

Př: (j-j) schéma pro $\partial_t u + a\partial_x u + u = 0$ - Stabilita pomocí von Neumanna.

$$\frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{k} + a\,\frac{v_{m+1}^n - v_m^n}{h} + v_m^n = 0$$

$$v_m^{n+1} = -k v_m^n - a\lambda\left(v_{m+1}^n - v_m^n\right) + v_m^n$$

$$= v_m^n\left(1-k+a\lambda\right) - a\lambda\, v_{m+1}^n$$

$$g(\xi,k,h) = (1-k+a\lambda) - a\lambda e^{i\xi h}$$

$$|g(\xi,k,h)|^2 = (1-k+a\lambda-a\lambda\cos h\xi)^2 + (a\lambda\sin h\xi)^2 =$$

$$= 1 + k^2 - 2k(1+a\lambda-a\lambda\cos h\xi) + a^2\lambda^2 + a^2\lambda^2\cos^2 h\xi + (a\lambda)^2\sin^2 h\xi +$$

$$2a\lambda - 2a\lambda\cos h\xi - 2(a\lambda)^2\cos h\xi =$$

$$= 1 + k^2 - 2k(1+a\lambda-a\lambda\cos h\xi) + 2a^2\lambda^2(1-\cos h\xi) + 2a\lambda(1-\cos h\xi)$$

$$= 1 + k^2 - 2k(1+a\lambda-a\lambda\cos h\xi) + (2a^2\lambda^2+2a\lambda)(1-\cos h\xi)$$

$$= 1 + k^2 - 2k + (2a^2\lambda^2+2a\lambda-2ka\lambda)(1-\cos h\xi) =$$

$$= (1-k)^2 + 2\cdot 2a\lambda(a\lambda+1-2k)\sin^2\xi h$$

$a\lambda \in [-1,0]$

$$\leq (1-k)^2 + 4a\lambda(a\lambda+1-2k) = 1-2k+k^2-2k\,4a\lambda + 4a\lambda(a\lambda+1)$$

$$= 1 + 4|a\lambda|(|a\lambda+1|) + k|\underbrace{(k+2+|8a\lambda|)}_{\text{omezené}}|$$

$a\lambda \in [-1,0]$

Průběh fce $f(x) = \frac{\lg(1+Kx)}{x}$ na $(0, x_0)$

$$f(0+) = K$$

$$f(x_0) = \frac{\lg(1+Kx_0)}{x_0}$$

f klesající, viz předchozí strana

$$\left(1+\frac{Kk}{2}\right)^{\frac{2T}{k}} \geq \left(1+\frac{Kk_0}{2}\right)^{\frac{2T}{k_0}} \longrightarrow +\infty \text{ pro } K \to +\infty \quad \perp.$$

Pokud platí pouze spec. podm je "⇒" jasné se stejným dk.

V dk "⇐" ~~lze volit $(k, h) \in \Lambda$ tak, aby $|g(\xi, k, h)| \geq 1+\delta$ pro $\delta > 0$~~

~~a tedy ...~~

máme $\delta > 0$ a $U(\xi) \ni \xi$: $|g(\xi, k, h)| \geq 1+\delta$.

dále $(k, h) \in \Lambda$, aby $\delta > Kk$ (lze, protože g nezávisí na (k,h), ale je lokálně nezávislost na obou, ale ne současně).

$\perp$.

Př: Lax-Friedrichs schéma pro rovnici $\partial_t u - a\partial_x u - u = 0$

$$\frac{1}{k}\left(v_m^{n+1} - \frac{1}{2}\left(v_{m+1}^n + v_{m-1}^n\right)\right) + a\frac{1}{2h}\left(v_{m+1}^n - v_{m-1}^n\right) - v_m^n = 0$$

$$\hat{v}^{n+1} = \hat{v}^n\left(\frac{1}{2}\left(e^{ih\xi} + e^{-ih\xi}\right) - \frac{ak}{2h}\left(e^{ih\xi} - e^{-ih\xi}\right) + k\right)$$

$$g(\xi, k, h) = k + \cos(h\xi) - \frac{ak}{h} i \sin(h\xi)$$

$$|g(\xi, k, h)|^2 = k^2 + 2k\cos^2 h\xi + \cos^2(h\xi) + \frac{a^2k^2}{h^2}\sin^2(h\xi)$$

$\frac{a^2k^2}{h^2} > 1$: $\quad$ vol $(h\xi) = \frac{\pi}{2}$: $|g(\xi, k, h)|^2 = k^2 + \frac{a^2k^2}{h^2}$ ⇒ není stabilní dle von Neumannovy věty

$\frac{a^2k^2}{h^2} \leq 1$: $\quad |g(\xi, k, h)|^2 \leq 1 + 2k + k^2 = (1+k)^2$ ⇒ stabilita dle von Neumannovy věty.

$\perp$

→ Kreiss 13. 3. 18

Proof of Lax-Richtmyer theorem: [Str, Section 10.5]   Předpoklad: $\forall T>0\ \exists C_T>0: \ |e^{q(\xi)t}| + |g(\xi,k,h)| \le C_T$

"$\Leftarrow$": Na rovnici provedeme Fourierovu transformaci v x a dostaneme

(*) $\hat{u}_t = q(\xi)\hat{u}$ pro j. fci $q(\xi)$, s poč. podm. $\hat{u}(0,\xi) = \hat{u}_0(\xi)$, $\xi\in\mathbb{R}$.

(To je možné, protože rce je 1. řádu v ∂_t a lineární, a ve skutečnosti je q racionální lomená fce.)

Položme maximální amplifikační faktor schématu $g(\xi,k,h)$

Numerické schéma je stabilní a tedy podle v. Neumannovy věty platí

$$|g(\xi,k,h)| \le 1+Kk \Rightarrow |g(\xi,k,h)|^n \le C_T \text{ pro } nk<T,\ k,h\in\Lambda$$

(viz důkaz von Neumanna)

Z (*) plyne $\hat{u}(t,\xi) = e^{q(\xi)t}\hat{u}_0(\xi)$ (Uvažuji volit $\hat{u}_0 = \sqrt{\frac{n}{2}}\chi_{U(\xi,\frac{1}{n})}$ s $n\to+\infty$)

Korektnost úlohy: $\exists C_T>0: \forall t\in(0,T): \|e^{q(\xi)t}\|_{\infty,\ \xi\in\mathbb{R}} \le C_T$.

Krok 1) Definuji počáteční podm. pro numerické schéma jako

$$v_m^0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi/h}^{\pi/h} \hat{u}_0(\xi)\, e^{imh\xi}\, d\xi.$$

a) Pak $\hat{v}^0 = \hat{u}_0$ na $L^2(-\pi/h,\pi/h)$ a tedy $\widehat{Sv^0} = \hat{u}_0\chi_{(-\pi/h,\pi/h)}$

$$\|Sv^0-u_0\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = \|\widehat{Sv^0}-\hat{u}_0\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = \int_{|\xi|>\pi/h}|\hat{u}_0(\xi)|^2\, d\xi \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

podle Lebesgueovy věty, protože $u_0\in L^2(\mathbb{R})$.

Tj. alespoň v čase $t=0$ je schéma konvergentní.

Krok 2) Ukážeme, že: $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall(k,h)\in\Lambda,\ h,k<\delta\ \forall\xi\in\mathbb{R}: \left|\frac{e^{kq(\xi)} - g(\xi,k,h)}{k}\right| < \varepsilon$

Plyne z konzistence schématu. Podrobněji dál.

c). Fix n: $nk<T$ a počítáme

$$\|u(t_n,\cdot)-Sv^n(\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \overset{\text{Parseval}}{=} \|\underbrace{\hat u(t_n,\cdot)}_{e^{q(\xi)t}\hat u_0(\xi)}-\underbrace{\hat v^n\chi_{(-\pi/h,\pi/h)}(\cdot)}_{\chi_{(-\frac{\pi}{h},\frac{\pi}{h})}g(\xi,k,h)^n\hat v^0=g(\xi,k,h)^n\hat u_0\chi_{(-\frac{\pi}{h},\frac{\pi}{h})}}\|^2_{L^2(\mathbb{R})}$$

$$\le \int_{-\pi/h}^{\pi/h}|e^{q(\xi)t_n}-g(\xi,k,h)^n|^2|u_0(\xi)|^2d\xi+\int_{|\xi|>\pi/h}|e^{q(\xi)t}|^2|\hat u_0(\xi)|^2d\xi$$

$$= \mathrm{I}+\mathrm{II}$$

$\mathrm{II}\longrightarrow 0$ as $h\to 0$ dle Lebesgue

$$|e^{q(\xi)nk}-g(\xi,k,h)^n|=\left|(e^{q(\xi)k}-g(\xi,k,h))\right|\left|\sum_{j=0}^{n-1}e^{q(\xi)jk}g(\xi,k,h)^{n-1-j}\right|$$

$$\le\frac{|e^{q(\xi)k}-g(\xi,k,h)|}{k}\underbrace{nk}_{\le T}C_T^2\longrightarrow 0 \text{ as } (k,h)\to 0$$

$$|\mathrm{I}|\le \cancel{\int\|u_0\|^2_{L^2(\mathbb{R})}\|e^{q(\xi)nk}-g(\xi,k,h)^n\|_{L^\infty(\xi\in\mathbb{R})}}_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}\longrightarrow \int_{-\pi/h}^{\pi/h}TC_T\left|\frac{e^{q(\xi)k}-g(\xi,k,h)}{k}\right|^2|u_0(\xi)|$$

$\longrightarrow 0$ podle Leb. věty (a nezávisí na n)

d) Obecná počáteční podmínka:

v^0_m ~~[illegible]~~

Schéma vyřešíme pro $\tilde v^0_m:=\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi/h}^{\pi/h}\hat u_0(\xi)e^{imh\xi}d\xi}_{(Tu_0)_m}\longrightarrow\tilde v^n_m$ a pro

počáteční podm. $w^0:=v^0_m-\tilde v^0_m\longrightarrow w^n_m$

Pak $v^n_m=\tilde v^n_m+w^n_m$ díky linearitě schématu.

Víme, že $\|u(t_n,\cdot)-S\tilde v^n\|^2_{L^2(\mathbb{R})}\xrightarrow{\text{viz def. konvergence}}0$. Protože $Sv^n_m=S\tilde v^n_m+Sw^n_m$

díky linearitě S, stačí ukázat, že $\|Sw^n_m\|_{L^2(\mathbb{R})}\longrightarrow 0$, $(k,h)\to(0,0)$ st. pro

n takové, že $nk<T$. Z předpokladu stability num. schématu víme, že

$$\|w^n_m\|^2_h\le C_T\sum_{j=0}^{J}\|w^j\|^2_h\le C_T\|w^0\|^2_h = C_T\|\widehat{w^0}\|^2_h=$$

$$C_T\|Sw^0\|^2_{L^2(\mathbb{R})}=C_T\|Sv^0-u_0\chi_{(-\frac{\pi}{h},\frac{\pi}{h})}\|^2_{L^2(\mathbb{R})}\longrightarrow 0 \text{ podle předpokladu}$$

$$\left(\le C_T\left(\|Sv^0-u^0\|_{L^2(\mathbb{R})}+\|u^0-u^0\chi_{(-\frac{\pi}{h},\frac{\pi}{h})}\|_{L^2(\mathbb{R})}\right)^2\right)$$

(Schéma je stabilní a tedy je $\|w^n\|^2_h\le C\|w^0_m\|^2_h$.)

Pozn: Je S operátor interpolace?

Platí $v \in \ell^2(\mathbb{Z})$. $\quad \hat v \in L^2(-\frac{\pi}{h},\frac{\pi}{h})$ $\quad Sv(x) = \mathcal{F}^{-1}\left(\hat v(x)\chi_{(-\frac{\pi}{h},\frac{\pi}{h})}\right)$

$$\mathcal{F} S v = \hat v \chi_{(-\frac{\pi}{h},\frac{\pi}{h})}$$

$$\mathcal{F} v := \mathcal{F}\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} v^k \delta_k\Big) = \ ?$$

Nejlepší aproximace ve smyslu, že zachová FT (ale posunuté jinam).

Odbočka: Operátorová definice konzistence:

$\boxed{\text{Def}}$ Pro danou PDR $Pu=f$ a numerické schéma $P_{kh}v = R_{kh} f$, řekneme, že diferenční schéma je konzistentní s rovnicí $Pu=f$ pokud pro každou hladkou ϕ platí, že $(P_{kh}\phi - P\phi)(t,x) \to 0$ pro $(k,h)\to(0,0)$.

(a

($\quad R_{kh}\phi - \phi \ (t,x) \to 0 \quad \forall (k,h)\to(0,0)$) $\perp$

Doplnění konzistence).

- diferenciální operátor P má tvar $P(\partial_t,\partial_x) = P_1(\partial_x)\partial_t + P_2(\partial_x)$

  definujeme $\phi(t,x)$ a necháme ho působit na $\phi(t,x) := e^{st}e^{ix\xi}$, s,ξ pevné

  $$P(\partial_t,\partial_x)\phi(t,x) = \underbrace{\left[P_1(i\xi)s + P_2(i\xi)\right]}_{\text{označme } p(s,\xi)}\phi(t,x), \quad q(\xi) = -\frac{P_2(i\xi)}{P_1(i\xi)}$$

  platí: $p(q(\xi),\xi) = 0$, tedy pro $s = q(\xi)$ a libovolné $\xi \in \mathbb{R}$ je ϕ řešení rovnice $P\phi = 0$. Dále píšeme $s = q(\xi)$.

- Z konzistence víme, že $(P_{kh}\phi - P\phi)_{(t,x)} \to 0 \quad \forall t,x$ a tedy

  $$P_{kh}\phi_{(t,x)} \to 0 \quad \forall (t,x).$$

- obecné jednokrokové ~~1. řádu~~ diferenční schéma $P_{kh}\phi$ má tvar $P_{kh}\phi(t,x) = \sum_{n=0}^{1}\sum_{m=-M}^{M}\phi(t+kn, x+hm)\, a_{nm}^{k,h}$

• Prodosazení ϕ do rovnice $(s = q(\xi))$

$$P_{\ell h}\phi(t,x) = \sum_{n=0}^{1}\sum_{m=-M}^{M} e^{\ell n s}\cdot e^{him\xi} a^{\ell h}_{nm}\,\phi(t,x) =: P_{\ell h}(s,\xi)\,\phi(t,x)$$

$$\Rightarrow P_{\ell,h}(q(\xi),\xi) \longrightarrow 0 \quad (\ell,h\to 0)$$

$\boxed{\text{Lemma:}}$ $\exists \varepsilon > 0 : \forall(\ell,h)\in A,\ \ell,h<\varepsilon : \left|\ell \sum_{m=-M}^{M} e^{\ell s} e^{him\xi} a^{\ell h}_{1m}\right| > \varepsilon$ $\boxed{\text{Ukážu až dole.}}$

Dk sporem: ať ex. posl $(\ell,h)\to(0,0)$ taková, že $\ell\sum_{m=-M}^{M} e^{\ell s} e^{him\xi} a^{\ell h}_{1m}\to 0$

Pak

(+) $$P_{\ell h}\phi(t,x) - P(\phi(t,x)) = \sum_{m=-M}^{M}\left(\frac{e^{\ell s}-1}{\ell}\cdot \ell e^{him\xi} a^{\ell h}_{1m} + e^{him\xi} a^{\ell h}_{1m} + e^{him\xi} a^{\ell h}_{0m}\right)\phi(t,x) - p(s,\xi)\,\phi(t,x)$$

dosazení pro $\phi_0(t,x) = e^{ix\xi}$ do konzistence dostaneme

$$\sum_{m=-M}^{M}\left(e^{him\xi}\left(a^{\ell h}_{1m} + a^{\ell h}_{0m}\right) - p(0,\xi)\right)\phi_0(t,x) \longrightarrow 0 \quad (\ell,h)\to(0,0)$$

tedy $\sum_{m=-M}^{M} e^{him\xi}\left(a^{\ell h}_{1m} + a^{\ell h}_{0m}\right) - p(0,\xi) \longrightarrow 0.\quad (\ell,h)\to(0,0)$

Dosadíme do (+) a dostaneme:

$$P_{\ell h}\phi(t,x) - P\phi(t,x) \longrightarrow [p(0,\xi) - p(s,\xi)]\,\phi(t,x) \quad \text{pro } (\ell,h)\to(0,0).$$

Z konzistence: $p(s,\xi) = p(0,\xi)\ \ \forall s>0.$

p nezávisí na s $\Downarrow$ rovnice je 1. řádu v t. $\perp$.

• von Neumannova analýza: $g(\xi,\ell,h)$ řeší $\forall \xi,\ell,h$ rovnici $P_{\ell,h}(\ell^{-1}\log g(\xi,\ell,h),\xi) = 0$

$$g(\xi,\ell,h) = -\frac{\sum e^{him\xi} a^{\ell h}_{0m}}{\sum e^{him\xi} a^{\ell h}_{1m}}$$

• Konečně: $\forall \xi\in\mathbb{R}$:

$$P_{\ell h}(\ell^{-1}\log g(\xi,\ell,h),\xi) - P_{\ell h}(q(\xi),\xi) \longrightarrow 0,\ (\ell,h)\to 0$$

$$= \frac{g(\xi,\ell,h) - e^{q(\xi)\ell}}{\ell}\ \underbrace{\ell\sum_{m=-M}^{M} a^{\ell h}_{1m} e^{ihm\xi}}_{\geq\,\varepsilon \text{ pro malé } (\ell,h)}$$

$$\Rightarrow \frac{g(\xi,k,h) - e^{q(\xi)\ell}}{\ell} \longrightarrow 0 \quad \text{pro } \ell,h\to 0 \qquad \perp.$$

"$\Rightarrow$"

Schéma není stabilní, von Neumannova analýza:

$$\forall K>0,\ \exists \xi_K \in \mathbb{R},\ (\tau_K, h_K) \in \Lambda : |g(\xi_K, \tau_K, h_K)| > 1 + K\tau_K$$

$$\xi_K \in \left(-\frac{\pi}{h_K}, \frac{\pi}{h_K}\right)$$

Ze spojitosti $g(\xi,\tau,h)$ ex. $\varepsilon_K > 0$; $g(\xi, \tau_K, h_K) > 1 + \frac{K}{2}\tau_K \ \forall \xi \in U(\xi_K, \varepsilon_K)$

Lze pp. $\varepsilon_K \leq \frac{1}{K^2}$ (jinak bychom zmenšili).

Definujme $\alpha_K > 0$ tak, aby $\alpha_K^2 \varepsilon_K = \frac{1}{K^2}$ a fce $\hat{v}_K(\xi) = \begin{cases} \alpha_K; & |\xi - \xi_K| \leq \varepsilon_K \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$

$$\|v_K\|^2_{L^2(-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h})} = \int_{\mathbb{R}} \alpha_K^2 \cdot \chi_{U(\xi_K, \varepsilon_K)} = 2\varepsilon_K \alpha_K^2 = \frac{2}{K^2}.$$

Počáteční podmínku chceme definovat $u_0(x) = \sum_{K=1}^{+\infty} v_K(x)$.

Pak $\|u_0\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \leq \sum_{K=1}^{+\infty} \frac{2}{K^2} = \frac{\pi^2}{3}$ a tedy $u_0 \in L^2(\mathbb{R})$.

Definujme translační operátor $(T u_0)_m = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} e^{imh\xi}\, \hat{u}(\xi)\, d\xi$

Pak $\|S T u_0 - u_0\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|\mathcal{F}^{-1}(\widehat{T u_0}\, \chi_{(-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h})}) - u_0\|_{L^2(\mathbb{R})} =$ Tohle mu zkr- pozorně změnit

Pars

$$= \|\widehat{T u_0}\, \chi_{(-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h})} - \mathcal{F} u_0\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|\mathcal{F} u_0\|_{L^2((-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h})^c)} \to 0\ h \to 0.$$

Tedy dostáváme, že schéma nekonverguje pro $(\tau_K, h_K) \to 0$ as $K \to +\infty$ a

$\mathcal{F} u_0$ jako poč. podm..

~~Problém: Proč $(\tau_K, h_K) \to (0,0)$?~~

→ Lemma 2: Je-li diferenční schéma konzistentní s PDR, je možné volit intervaly

$I_K := [\xi_K - \varepsilon_K, \xi_K + \varepsilon_K]$ disjunktní a $(k_K, h_K) \to (0,0)$.

Předpoklad: Pro konvergenci $(k_K, h_K) \to (0,0)$ budeme předpokládat, že

$\forall \varepsilon > 0, \exists C_\varepsilon > 0 : \forall \|(k,h)\| > \varepsilon, \xi \in \mathbb{R}$, $k,h \in \Lambda$: $|\bar{g}(\vartheta, k, h)| \leq C_\varepsilon$ a $\bar{g}$ je spojitá na $[-\pi,\pi] \times \bar{\Lambda}$.

$\bar{g}(\vartheta, k, h) := g(\vartheta/h, k, h)$

Dk: Lemmatu: Ať $(k_K, h_K) \not\to (0,0)$, protože je $\bar{\Lambda}$ kompaktní, ex. vybraná konv.

podposl. označme ji stejně: a limita (k_0, h_0), $\vartheta_K \to \vartheta_0 \in [-\pi, \pi]$

Ze spojitosti $\bar{g}$ v (k_0, h_0): $\quad |\bar{g}(\vartheta_K, k_K, h_K)| > 1 + k_K K$

$$K \to +\infty$$

$$\downarrow$$

$$|\bar{g}(\vartheta_0, k_0, h_0)| \geq +\infty \quad ↯$$

$$\in \mathbb{R}$$

Předpoklad: • $\bar{g}(\vartheta, k, h) := g\left(\frac{\vartheta}{h}, k, h\right)$ je definována na $[-\pi,\pi] \times \Lambda$ a spojitá na $[-\pi,\pi] \times (0,+\infty)^2$

• $\bar{\Lambda} \subset (0,+\infty)^2 \cup \{(0,0)\}$

Důsledek: $\forall \varepsilon > 0, \exists C_\varepsilon > 0, \forall \vartheta \in [-\pi,\pi], (k,h) \in \left(\bar{\Lambda} \setminus U_\varepsilon(0,0)\right)$:

$$|\bar{g}(\vartheta, k, h)| \leq C_\varepsilon$$

Dk: Lemma: Ať žádná vybraná posl. z $(k_K, h_K) \not\to (0,0)$. Pak $(0,0)$ není hromadný bod $\{k_K, h_K\}$ a tedy ex. $\varepsilon > 0$: $(k_K, h_K) \in \Lambda \setminus U_\varepsilon(0,0)$ pro nek. mnoho $K \in \mathbb{N}$.

Protože $\overline{\Lambda - U_\varepsilon(0,0)}$ je kompaktní, ex. vybraná podposl. $(k_K, h_K) \to (k_0, h_0) \in \bar{\Lambda} \setminus U_\varepsilon(0,0)$

Speciálně $k_0 > 0$. Supp. $\vartheta_K \to \vartheta_0 \in [-\pi,\pi]$. Ze spoj. $\bar{g}$ v (ϑ_0, k_0, h_0):

$$|g(\vartheta_K, k_K, h_K)| > 1 + K k_K$$

$$\downarrow$$

$$|g(\vartheta_0, k_0, h_0)| \geq +\infty \quad \perp \quad ↯$$

$$\in \mathbb{R}$$

Indukcí ukážeme, že I_K je možné zvolit dle.

Pro $K=1$ jasné.

Ať máme $I_1, \dots, I_{K-1}$. Chceme sestrojit I_K. Ať pro naše možné [illegible].

$$\forall \vartheta \in \bigcup_{j=1}^{K-1} I_j : \quad |g(\vartheta, k, h)| \leq 1 + Kk$$

$\vartheta, h \in \Lambda$:

Z lemmatu b:

Podrobnější dk: Lax-Richtmyer:

Fixuji $T>0$. ~~...~~ — pro ta m: $|e^{tq(\xi)}| \le c_T$

Najdeme $K \in \mathbb{N}$ tak, aby $\frac{c_T-1}{K} \le \frac{T}{8}$ a $m \in \mathbb{N}$: $\frac{T}{2} \le m k_K \le T$.

Označme v^m_m příslušné řešení num. schématu s př. poč. Tu_0. Pak

$$\|Sv^m - u(t_m,\cdot)\|_{\xi}^2 \ge \|v^m - Tu(t_m,\cdot)\|_h^2 = \int_{-\pi/h}^{\pi/h} \left|g(\xi,k,h)^m - e^{q(\xi)mk}\right|^2 |\hat{u}_0(\xi)|^2 \, d\xi$$

$\|u\|_2 \ge \|Tu\|_h$

Dále: $\left|g(\xi,k,h)^m - e^{q(\xi)mk}\right| \ge |g(\xi,k,h)|^m - c_T \ge (1+\frac{1}{2}K k_K)^m - c_T$

pro $\xi \in (\xi_K - \varepsilon_K, \xi_K + \varepsilon_K)$

Tedy $\|Sv^m - u(t_m,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \ge \left[(1+\frac{1}{2}K k_K)^m - c_T\right]^2 \underbrace{2\varepsilon_K \cdot \alpha_K^2}_{=\frac{2}{K^2}}$

$$= 2\left[\frac{(1+\frac{1}{2}K k_K)^m - c_T}{K}\right]^2 \ge 2\left(\frac{1+\frac{1}{2}K m k_K - c_T}{K}\right)^2$$

$$\ge 2\left(\frac{1}{2}m k_K - \frac{c_T-1}{K}\right)^2 \ge 2\left(\frac{T}{4} - \frac{T}{8}\right)^2 = 2\left(\frac{1}{8}T\right)^2 = \frac{T^2}{32}$$

$\to$ Schéma není konvergentní! $\perp$.

Variace Lemmatu: Buď $J \subset (-\frac{\pi}{h_0}, \frac{\pi}{h_0})$ uzavřená množina (kompaktní), $k_0, h_0 \in \Lambda$.

Pak ex. $c^*>0$, $\forall k,h \in \Lambda$, $k<k_0$, $h<h_0$, $\xi \in J$: $\left|\frac{e^{kq(\xi)} - g(\xi,k,h)}{k}\right| \le c^*$.

Dk. Lemmatu 2: Indukcí dle K. $K=1$ triv. $K \to K+1$. Sporem, ať

$\forall (k,h) \in \Lambda$, $k<k_K$, $h<h_K$, $\xi \in \left(\bigcup_{j=1}^{K} \overline{U(\xi_j,\varepsilon_j)}\right)^c$: $|g(\xi,k,h)| \le 1+(K+1)k$

Pak volíme $J = \bigcup_{j=1}^{K} \overline{U(\xi_j,\varepsilon_j)}$ v předchozím lemmatu a dostaneme c^*. Pak

$\forall \xi \in J, (k,h) \in \Lambda, k<k_K, h<h_K$: $|g(\xi,k,h)| \le c^*k + e^{kq(\xi)} \le c^*k + (c_T)^{1/m}$

[m volíme tak, aby $km > \frac{T}{2}$, $\frac{1}{m} < \frac{2k}{T}$] $\le c^*k + (1+c_T-1)^{\frac{2k}{T}} \le 1+\left(c^*+(c_T-1)\frac{2}{T}\right)k$

$\Rightarrow$ stabilita schématu. NE

$\longrightarrow$ Konec 15. 3. 18

3. Cauchyova úloha pro kvazilineární rovnici 1. řádu

~~Ozn~~ <u>Definice</u>: Buďte $a_1, \dots, a_n, f \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$, $T > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$.
$u_0 \in C^1(\mathbb{R}^{n-1})$

Rovnici
$$\sum_{j=1}^{n} a_j(u(x), x)\, \partial_{x_j} u = f(u(x), x) \quad \text{v } \mathbb{R}^n \qquad (1)$$

nazveme kvazilineární rovnicí (PDR) 1. řádu

Počáteční podmínku předepisujeme ve tvaru
$$u(\bar{x}, 0) = u_0(\bar{x}) \quad \text{pro } \bar{x} \in \mathbb{R}^{n-1}. \qquad (2)$$

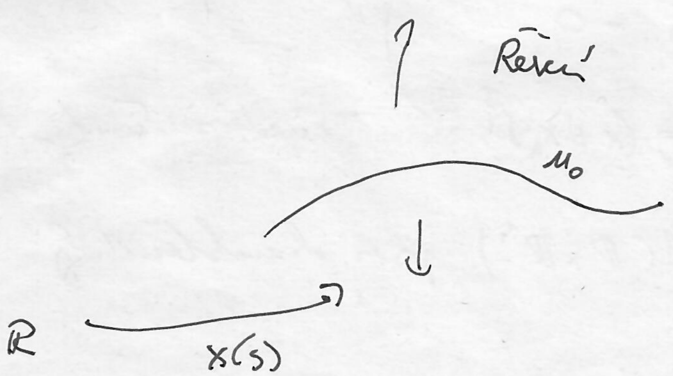
Funkci $u : \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ nazveme klasickým řešením Cauchyovy úlohy pro kvazilineární rovnici 1. řádu v Ω pokud

- $u \in C^1(\Omega)$
- rovnice (1) a (2) platí bodově $\forall x \in \Omega$ a $\forall x \in \Omega;\ x_n = 0$.

Př: $\partial_{x_2} u + a \partial_{x_1} u = 0$, $a \in \mathbb{R}$ je transportní rovnice

Pozn:
- Většinou se značí proměnné $(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1}$.
- Počáteční podmínku lze zadat na ~~libovolné~~ křivce

$$s \longrightarrow x(s)$$



I: Homogenní úloha ($f \equiv 0$): $\sum_{j=1}^{n} a_j(u(x),x)\,\partial_j u(x) = 0$ (3)

Buď $u \in C^1(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$;

Definice: Systém (ODR) $\dot{x}_j = a_j(u(x_j), x_j)$, $j = 1,\dots,n$

pro neznámé fce $x_j = X_j(s)$; $s \in \mathbb{R}$, $j \in \{1,\dots,n\}$ ~~nazveme~~ se nazývá charakteristický systém příslušný rovnici (3) a funkci u. Každé řešení tohoto systému se nazývá charakteristikou (charakteristickou křivkou) příslušnou rovnici (3) a fci u.

Pozn: Za našich předpokladů ($a_j \in C(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$) každým bodem $\mathbb{R}^n$ prochází charakteristika podle Peanovy věty. Není ale určená jednoznačně. Charakteristiky se mohou dotýkat, ~~nemohou se křížit~~ ~~Pokud a závisí i na u, mohou se i křížit.~~ Pro jeden u se nemohou křížit.

Př: $\partial_t u + 3\sqrt[3]{x^2}\,\partial_x u = 0$

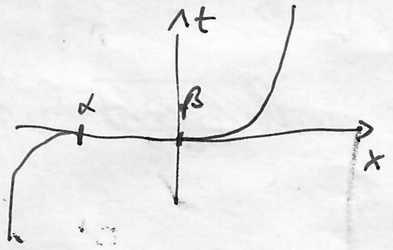
X

$t' = 1$, $x' = 3\sqrt[3]{x^2}$ $\Rightarrow$ $\int \frac{1}{3x^{2/3}} = x^{1/3} = s + s_0 + \alpha$

$x(s) = (s + s_0 + \alpha)^3$

$t = s + s_0$;

$x(s) = (t + \alpha)^3$



lépe: $3\sqrt[3]{t^2}\,\partial_t u + \partial_x u = 0$

$\Rightarrow$ Charakteristiky $t = (x + x_0)^3$; nejednoznačnost.

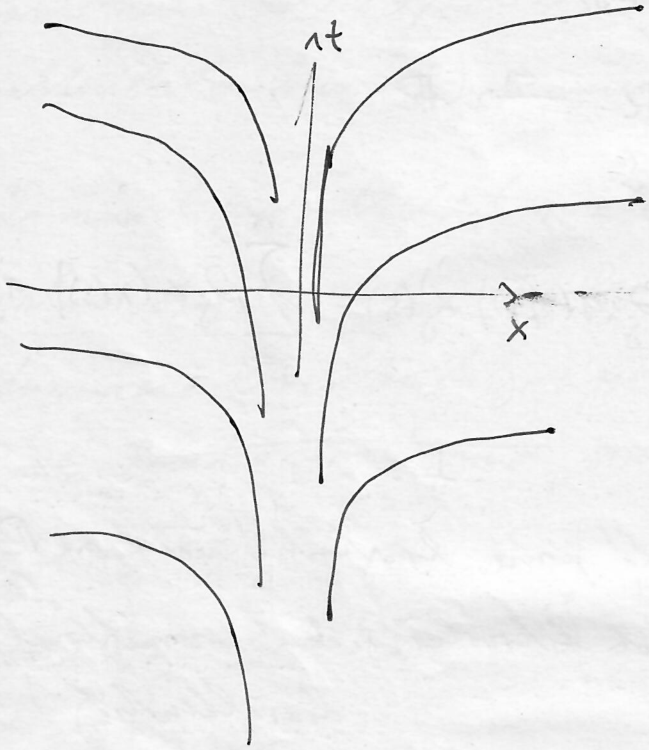
Pozn: Pokud navíc $a_j \in C^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$ jsou charakteristiky jednoznačně určené!

Rce: ~~$u_t + xu_x = 0$~~ $\partial_t u + x\partial_x u = 0$ + počát. podm. $u(0,x) = u_0(x)$

Char. systém: $t' = 1 \Rightarrow t(s) = s + t_0$

$$x' = x \Rightarrow x(s) = Ce^{s+t_0} = Ce^{t(s)}$$

$\Rightarrow$ Charakteristiky: $x(t) = Ce^t$ resp. $t = \lg\left(\frac{|x|}{D}\right)$ — $x>0$ nebo $x<0$, $D>0$



Fix $(t_1, x_1) \in \mathbb{R}^2$, $t_1 = \lg \frac{x_1}{D} \Rightarrow D = x_1 e^{-t_1}$

$x_1 > 0$

Poč. podm. v $t=0$: $x = x_1 e^{-t_1} \Rightarrow u(t,x) = u_0(xe^{-t})$.

Př: $a_j = a_j(u)$: $\sum_{j=1}^{m} a_j(u(x))\,\partial_j u(x) = 0$

Char. systém: $x_j'(s) = a_j(u(x))$, $j = 1, \dots, m$

Pokud je u řešení, je konstantní podél charakteristik dle lemmatu a tedy PS je konstantní a charakteristiky jsou přímky ve směru vektoru $(a_1(u(x)), \dots, a_m(u(x))) = \vec{a}$

Přímky: $x(s) = a(u(x))s + \tilde{x}$, $\tilde{x} \in \mathbb{R}$

Pp. $a_n \neq 0$ $a(u(\tilde{x}))$ je kolmá na charakteristice protínající $\tilde{X}_n \in \mathbb{R}^n$

$\cancel{0 = x_n(s) = a_n(u(\tilde{x}))\, s + \tilde{a}_n \Rightarrow s = -\frac{\tilde{a}_n}{a_n(u(\tilde{x}))}}$

Jaká charakteristika to je? $x(s) = a(u(x))\, s + \tilde{X}_n$

$\Rightarrow$

Kdy je $\tilde{X}_n = 0$? $\Rightarrow$ $s_0 = -\dfrac{\tilde{X}_n}{a_n(u(\tilde{x}))}$

$$x(s_0) = -\frac{\tilde{X}_n}{a_n(u(x))}\, a(u(\tilde{x})) + \tilde{x}$$

$$\Rightarrow u_0\left(\tilde{x} - \frac{\tilde{X}_n}{a_n(u(x))}\, a(u(\tilde{x}))\right) = u(\tilde{x})$$

$\rightarrow$ implicitní vztah pro řešení u.

Pozn: Charakteristiky jsou přímky, ale závisí na počáteční podmínce

mohou se protínat $\Rightarrow$ u přestane být hladké

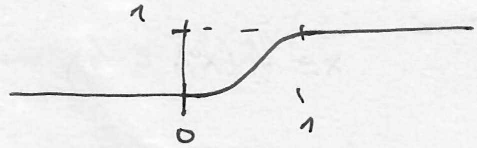
Příklad: Burgersova rovnice nevazká (např: dynamika plynů, modelování dynamiky toku)

$$\partial_t u + u\,\partial_x u = 0$$

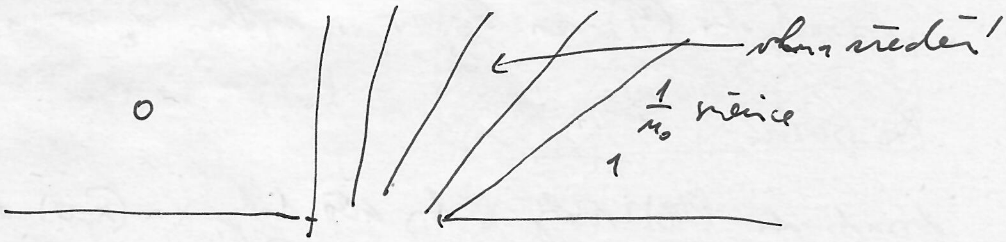
Podle předchozího: $u(t,x) = \boxed{\cancel{}}\; u_0(x - u(t,x)\, t)$

$a(u) = (1, u(t,x))$

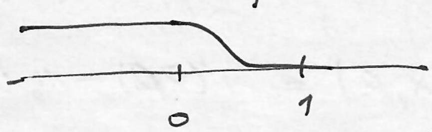
Volme poč. podm. u_0 rostoucí



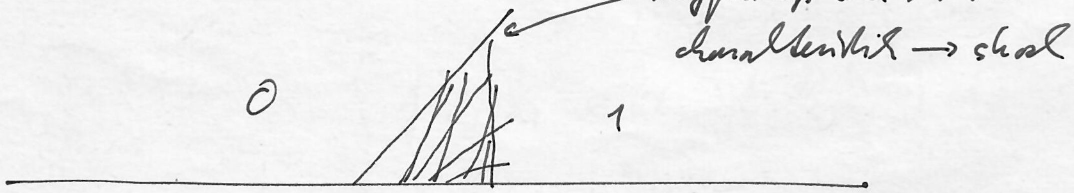
Pak řešení:



u_0 klesající:



řešení



→ Konec 20.3.18

II. Nehomogenní úloha

Řešíme úlohu II (1).

Nechť $G \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$, $J \subset \mathbb{R}$ oblasti a $w: J\times G \to \mathbb{R}$ je klasické řešení úlohy

(4) $$\sum_{j=1}^{n} a_j(z,x)\, \partial_{x_j} w + f(z,x)\, \partial_z w = 0 \quad \text{pro } (z,x)\in J\times G$$

(5) $$w(z,\bar{x},0) = z - u_0(\bar{x}) \quad \text{pro } z\in J,\ \bar{x}\in \mathbb{R}^{n-1}\cap G$$

Buď $(z^0, x^0)\in J\times G$ takový, že

$$w(z^0,x^0) = 0, \quad \partial_z w(z^0,x^0)\neq 0, \quad x^0_n = 0$$

Potom ex. okolí $U(z^0)\subset J$, $U(x^0)\subset G$ a fce $u \in C^1(U(x^0))$
$u: U(x^0) \to U(z^0)$

takové, že a) $\partial_z w(z,x)\neq 0 \quad \forall (z,x)\in U(z^0)\times U(x^0)$

b) $w(u(x),x) = 0 \quad \forall x\in U(x^0)$, $u(x^0) = z^0$

c) u je klasické řešení úloh (1) & (2) na $U(x^0)$

Dk: a), b) z ~~věty~~ IFT

c) $x\in U(x^0)$ z b) derivace dle x_j: $\partial_z w(u(x),x)\,\partial_j u(x) + \partial_{x_j} w(\,) =$

dosadíme do (4) za $\partial_{x_j} w$ a vytkneme $\partial_z w$ a dokážeme výsledek

Připomeňme:

dosadíme do ~~(2)~~ b) a to tady $x = (\bar{x},0)$ a užij (5)

$$0 = w(u(\bar{x},0),\bar{x},0) = u(\bar{x},0) - u_0(\bar{x})$$

$\perp$.

Pr.: $u_t + a u_x = f$

$$w_t + a w_x + f w_z = 0$$

Charakteristik: $t(s) = s + t_0$

$x(s) = a(s+t_0) + x_0$

$$z(s) = \int_0^s f(r+t_0, a(r+t_0)+x_0)\,dr + z_1$$

Fix: t_1, x_1, z_1 $\quad x_0 = x_1 - a t_1$

Wähle (t_1, x_1, z_1) in $s=0$: $t_0 = t_1$

$z_1 = \tilde{z}$

$t=0 \Rightarrow s = -t_1$

$\Rightarrow x(-t_1) = x_1 - a t_1$

$$z(-t_1) = \int_0^{-t_1} f(r+t_1, a(r+t_1)+x_1-at_1)\,dr + z_1$$

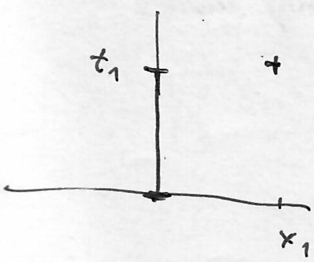
$$= \int_0^{-t_1} f(r+t_1, ar+x_1)\,dr + z_1$$

$$w(z_1,t_1,x_1) = -\int_{-t_1}^{0} f(r+t_1, ar+x_1)\,dr + z_1 - u_0(x_1-at_1)$$

$$\Rightarrow z_1(t,x) = u_0(x_1-at_1) + \int_{-t_1}^{0} f(r+t_1, ar+x_1)\,dr$$

$$= u_0(x_1-at_1) + \cancel{\int_0^{t_1} f(r-t_1, ar+x_1)\,dr}$$

$$+ \int_0^{t_1} f(t_1-r, x_1-ar)\,dr$$



$t_1 - r = s$

$$\longrightarrow \int_0^{t_1} f(s, x_1 - a(t_1-s))\,ds$$

Dodatky k numerické analýze PDR 1. řádu – transportní rovnice

CFL, ... upwinding, dissipace, disperse, princip maxima?

$$\partial_t u + a\partial_x u = 0 \quad \text{řešení máme}$$

CFL podmínka [Str, §1.6] $u_0(x-at)$ – vlna se šíří rychlostí a

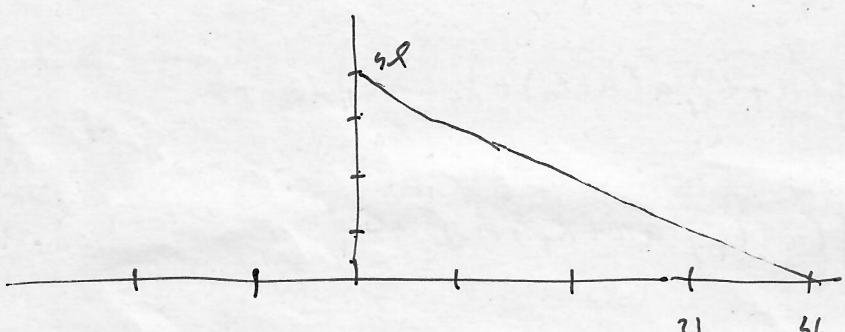
[Courant, Friedrichs, Lewy]

1) Uvažme numerické schéma tvaru

(6) $$v_m^{n+1} = \alpha v_{m-1}^n + \beta v_m^n + \gamma v_{m+1}^n$$

s časovým krokem k a prostorovým krokem h; $\lambda := \frac{k}{h}$.

Jaká je rychlost šíření „informace" na síti dané schématem



Informace z bodu (0) je za 4k čas dorazí nejdále do 4h. Max rychlost je tedy

$$\frac{h}{k} = \frac{1}{\lambda}.$$

Pokud je rychlost šíření schématu menší než rychlost šíření vlny rovnice, schéma nemůže konvergovat, tj. dostáváme podmínku.

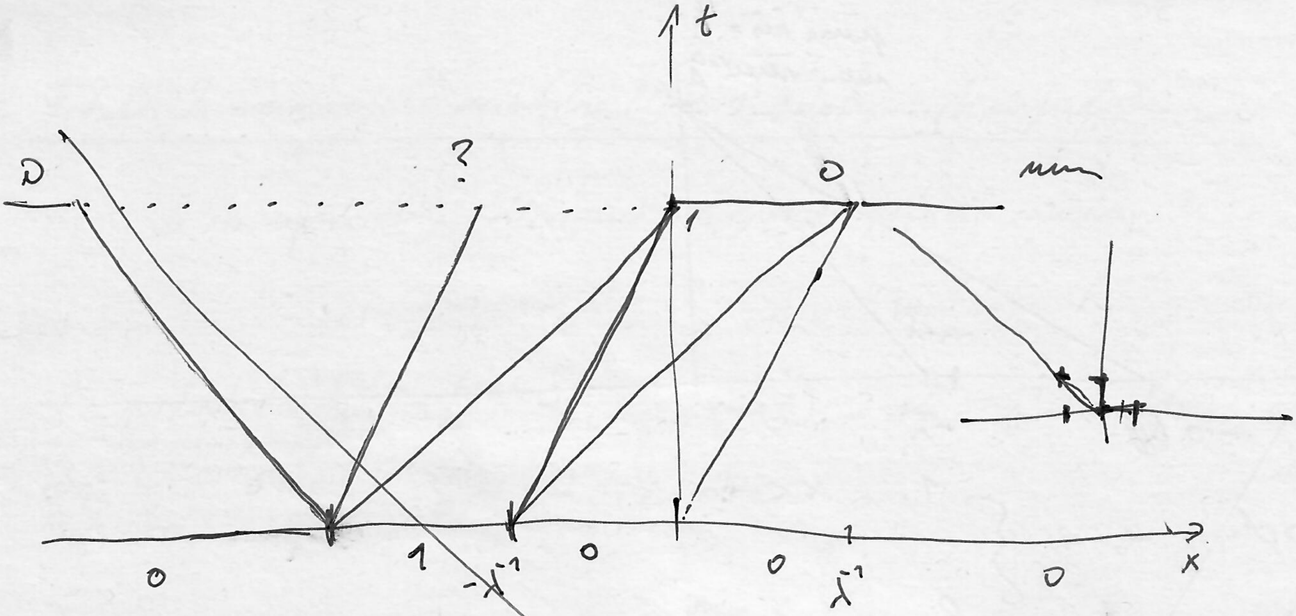
$$|a| \le \frac{1}{\lambda} \iff |a\lambda| \le 1$$

(pro transportní rci)

Věta [Str 1.6.1]: Pro numerické schéma (6) s konstantním $\lambda>0$ je nutnou podmínkou ~~stability~~ konvergence CFL podmínka

$$|a\lambda| \le 1.$$

Pozn.: Zde: oblast stability $\Lambda = \{(k,h) \in (0,+\infty)^2;\ \frac{k}{h} = \lambda\}$.

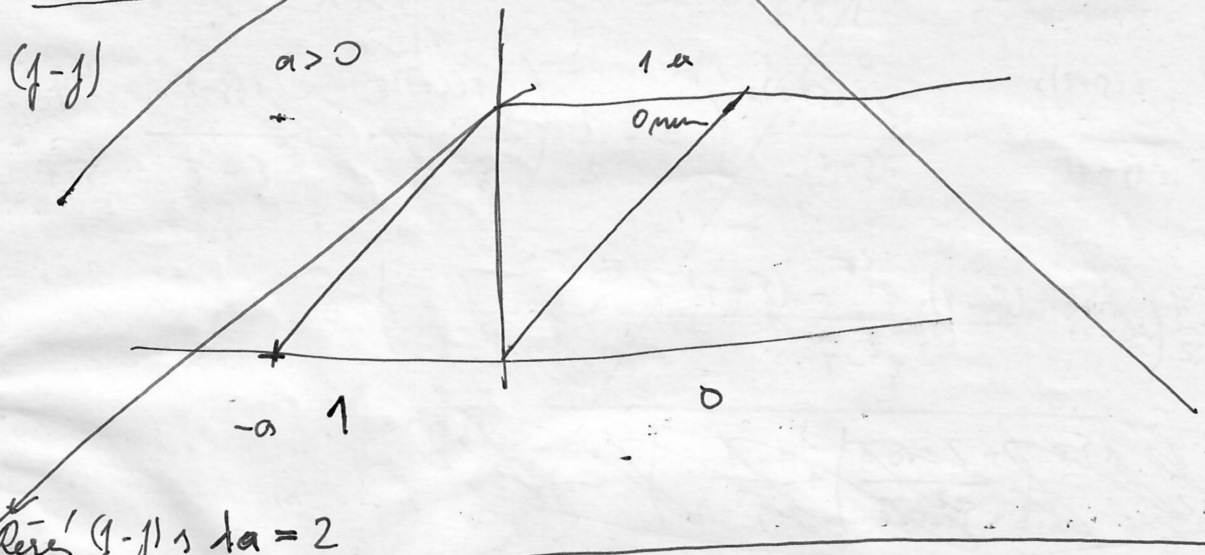


Příklad: (j - efekt) $\lambda a \in \{0, \tfrac{1}{2}, 1\}$

$$\frac{u_m^{n+1}-u_m^{n}}{k} + a\,\frac{u_{m+1}^{n}-u_{m}^{n}}{h} = 0, \quad u_m^{n+1} = u_m^n + \lambda a\left(u_{m+1}^n - u_m^n\right)$$

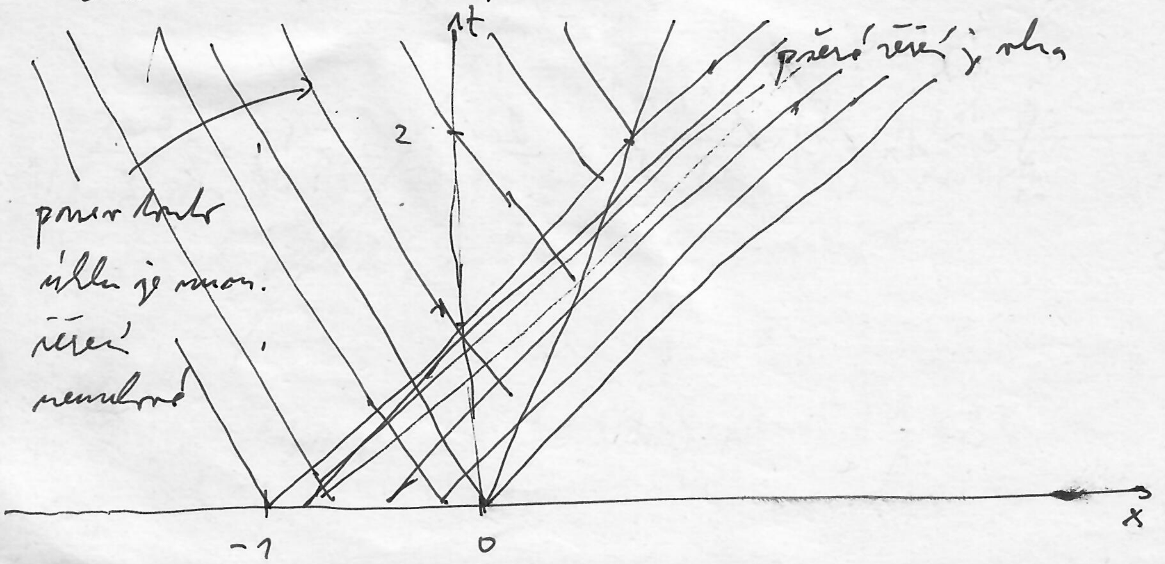
$$= \lambda a\, u_{m+1}^n + (1-\lambda a)\, u_m^n$$

(j-j)



Řešení (j-j) s $\lambda a = 2$

Idea dk: Volme počát. podm. s cpt. nosičem v $(-1, 0)$, $a = 1$, $\lambda = 2$



⊥

"Dů": Zkuste nalézt konkrétní protipříklad!.

Pozn: Význam CFL podmínky je v tom, že musí metoda rychleji šířit řešení schématu.

Pozn. Vylepšení CFL: Definujme oblast závislosti numerického schématu v bodě sítě (nk, mh) jako ~~[illegible]~~ ~~množinu všech bodů, na kterých hodnota řešení $v(t_n, x_m)$ závisí~~ ← OK

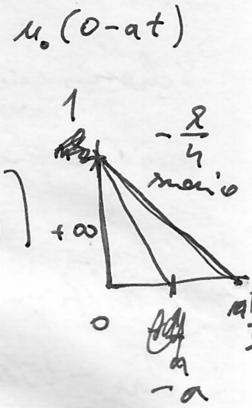
označme $C(t_n, x_m)$. $\cancel{\triangle((nk,mh),(0,(m+n)h),(0,(m-n)h))}$

Oblast závislosti PDR v bodě (t,x) je množina bodů, na kterých závisí hodnota řešení v (t,x). Označme $D(t,x)$.

Nutná podmínka konvergence dif. schématu je, aby $D(t_n,x_m) \subset C(t_n,x_m)$ $\forall n,m$, $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}$

Př: (J-J) schéma: (CFL) vyjadřuje $\left|a \frac{k}{h}\right| \le 1$

Vylepšení CFL: $C(t_n, x_m) = \triangle\left((t_n, x_m), (0, x_{m+n}), (0, x_m)\right)$ $+\infty$



$\Rightarrow$ podm: $0 \le -a \le \frac{h}{k}$

$0 \le -a\lambda \le 1$

$-1 \le a\lambda \le 0$

odpovídá von Neumannově analýze stability – dříve.

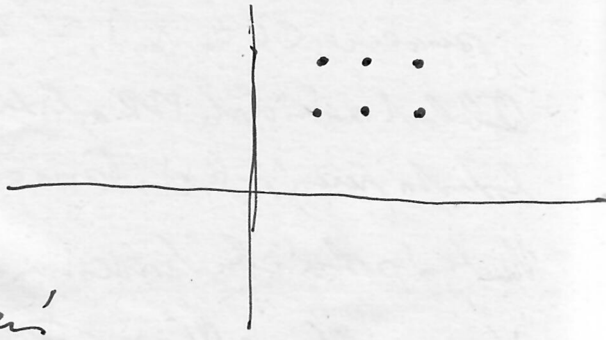
$\longrightarrow$ Konec 22.3.18

Disipace

- Vhodná schémata

Crank-Nicholson

$$\frac{v_m^{n+1}-v_m^n}{k} + a\,\frac{v_{m+1}^{n+1}-v_{m-1}^{n+1}+v_{m+1}^{n}-v_{m-1}^{n}}{4h} = \frac{f_m^{n+1}+f_m^n}{2}$$



pro $\partial_t u + a\,\partial_x u = f$

s $f=0$ a poč. podm. $v_m^0 = \eta(-1)^m$

a pak je $v_m^n := \eta(-1)^m$ řešení

Schéma netlumí parazitní nepřesnosti. Parazitní podm. souvisí nejdelší oscilace na dané síti. ~~Vždy [illegible]~~

Oproti tomu:

Lax-Wendroff:
$$\frac{v_m^{n+1}-v_m^n}{k} + a\,\frac{v_{m+1}^{n}-v_{m-1}^{n}}{2h} + \frac{a^2k}{2}\,\frac{v_{m+1}^n-2v_m^n+v_{m-1}^n}{h^2}$$
$$= \frac{1}{2}\left(f_m^{n+1}+f_m^n\right) - \frac{ak}{4h}\left(f_{m+1}^n - f_{m-1}^n\right)$$

s $|a\lambda|<1$ dává pro poč. podm. $v_m^0 = \eta(-1)^m$ řešení

$$v_m^n = \left(1-2a^2\lambda^2\right)^n(-1)^{n+m}$$

a protože $|1-2a^2\lambda^2| < 1$ oscilace jsou tlumeny.

Definice [Str, 5.1.1]

~~[struck out]~~ Jednokrokové schéma je disipativní řádu $2r$ jestliže ex. $c>0$ nezávislé na (k,h) takové, že amplifikační faktor

$g(\xi,k,h)$ splňuje

$$|g(\tfrac{\theta}{h},k,h)| \le 1 - c\left(\sin^2\left(\tfrac{1}{2}\theta\right)\right)^{2r} \qquad \forall \theta\in(-\pi,\pi)$$

Pro schéma Lax-Wendroff platí:

$$|g(\tfrac{\theta}{h},k,h)|^2 = 1 - 4a^2\lambda^2(1-a^2\lambda^2)(\sin\tfrac{1}{2}\theta)^4$$

a tedy je disipativní řádu 4 pro $|a\lambda|\in(0,1)$

(Pozn: Stačí $|g(\ )| = \sqrt{1-c(\sin\frac{1}{2}\theta)^4}$

pro malé θ … Taylor

pro velké odhad)

Crank-Nicolson:

$$\frac{g-1}{k} + a\,\frac{g(e^{ih\xi}-e^{-ih\xi}) + 1(e^{ih\xi}-e^{-ih\xi})}{4h} = 0$$

$$g\left(1+\frac{a\lambda}{4}2i\sin h\xi\right) = 1 - \frac{a\lambda}{4}2i\sin h\xi$$

$$g = \frac{1-z}{1+z} = h(z),\quad z = \frac{a\lambda}{2}i\sin h\xi$$ ← dosaď $z=it$ a spočti!

$$h(0)=1,\quad h(i) = \frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)^2}{2} = \frac{1-2i-1}{2} = -i$$

$\Rightarrow |g| = 1.$

Schéma není disipativní!

Disipace je vhodná, protože vyhlazuje případné chyby - rychlé oscilace.

Je potřeba být opatrný, protože to není vždy vhodné. Řešení transportní rovnice je vlna a ta taky není vyhlazovaná!

Lze možné přidat člen: $-\frac{\varepsilon}{k}\left(\frac{v_{m+1}-2v_m+v_{m-1}}{h^2}\right)$ ~ diskrétní Laplacián

Disperze

Pro transportní rovnici $\partial_t u + a\,\partial_x u = 0$ řešení splňuje

$$\hat{u}(t+k,\xi) = e^{-iak\xi}\,\hat{u}(t,\xi).$$

Numerické řešení splňuje:

$$\hat{v}^{n+1} = g(\xi,k,h)\,\hat{v}^{n}.$$

Je přirozené očekávat, že $g \approx e^{-iak\xi}$

Zapišme $g(\xi,k,h) = |g(\xi,k,h)|\, e^{-ik\xi\alpha(\xi h)}$

Definice: Veličina $\alpha(\xi h)$ se nazývá fázová rychlost.

Rozdíl $a-\alpha(\xi h)$ se nazývá ~~chyba~~ fázová chyba.

~~..........~~ $\alpha(\xi h)$

Jev kdy $\alpha(\xi h)$ (místo a) není konstantní se nazývá disperze

Pozn: Disperse znamená, že vlny různé frekvence cestují různou rychlostí!

Pro Lax-Wendroffovo schéma: $g(\xi,k,h) = 1 - 2(a\lambda)^2\sin^2\frac{1}{2}h\xi - ia\lambda\sin h\xi$

Víme: $|g(\xi,k,h)| = \sqrt{1-4|a\lambda|^2(1-|a\lambda|^2)|\sin(\frac{\xi h}{2})|^2}$

Pro malé hodnoty $h\xi$ platí:

$$\operatorname{tg}(+k\xi\alpha(h\xi)) = +\frac{a\lambda\sin h\xi}{1-2(a\lambda)^2\sin^2\frac{1}{2}h\xi}$$

~~$k\xi\alpha(h\xi) \ldots$~~ $= a\lambda(h\xi)$

$$k\xi\alpha(h\xi) = \operatorname{arctg}\left(\frac{a\lambda\sin h\xi}{1-2(a\lambda)^2\sin^2(\frac{1}{2}h\xi)}\right) = ah\lambda\xi\left(1-\frac{1}{6}(h\xi)^2(1-(a\lambda)^2\right) + O(h\xi)^3$$

$$\Rightarrow \alpha(h\xi) = a\left(1-\frac{1}{6}(h\xi)^2(1-(a\lambda)^2) + O(h\xi)^3\right)$$

Vidíme tedy, že pro malá $h\xi$ je $\alpha(h\xi) \leq a$, ~~řešení se ší~~ numerické řešení postupuje pomaleji než přesné řešení.

Obecný postup je, že se snažíme volit parametr d tak, aby schéma bylo konzistentní a stabilní ale disipace a disperze byla co nejmenší. A na okraji oblasti stability.

Byl 22.3.18

Pozn. K nelineárním úlohám pro kvazilineární PDR 1. řádu

Řešíme $\partial_t u + u\partial_x u = 0$ Burgersova

$\to \partial_t w + z\partial_x w = 0$ Poč. podm.: $w(0,x,z) = z - u_0(x)$

char. syst.:

$$
\begin{aligned}
t' &= 1 & t(s) &= s + t_0 \\
x' &= z & x(s) &= z_0 s + x_0 \\
z' &= 0 & z(s) &= z_0
\end{aligned}
$$

Fix t_1, x_1, z_1 $t_0 := 0$, $t = 0 \Rightarrow s = 0$, $t = t_1 \Rightarrow s = t_1$

$$
s = t_1 ; \quad \begin{aligned} x_1 &= z_0 t_1 + x_0 \\ z_1 &= z_0 \end{aligned} \quad \Rightarrow z_1 = z_0, \quad x_0 = x_1 - z_1 t_1
$$

$$
t = 0 : \quad s = 0, \quad \begin{aligned} x(0) &= x_1 - z_1 t_1 \\ z(0) &= z_1 \end{aligned}
$$

$$\Rightarrow w(t,x,z) = z - u_0(x - zt)$$

$\Rightarrow$ Je-li w nulová hodnota: $z = u_0(x)$, Pak je u nalezené řešení implicitní rovnice $u(t,x) = u_0(x - u(t,x)t)$

Princip maxima

Pro kvazilineární rovnice 1. řádu platí: řešení je konstantní na charakteristikách.

Tedy:
$$\left.\begin{aligned} &\sum a_j(u(x),x)\,\partial_j u(x) = f(u(x),x) \quad \text{v } \Omega \ ~~\ ~~\ \mathbb{R}^n \\ &u = u_0 \quad \text{v } \Gamma \subset \{x\in\mathbb{R}^n;\ x_n = 0\} \end{aligned}\right\} (1\text{-}2)$$

Lemma: Ať $\overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$ splňuje $\overline{\Omega} \subset CH$, kde ~~...~~, u je řešení (1-2) v Ω a

$$CH = \{ ~~\ldots~~ \ \bigcup \{\langle\gamma\rangle,\ \gamma:(0,1)\to\mathbb{R}^n \text{ charakteristika protínající } \Gamma.\}$$

Pak $\sup_{\Omega} u \le \sup_{\Gamma} u$ a $\inf_{\Omega} u \ge \inf_{\Gamma} u$

Dk: ~~Charakteristiky~~ platí řešení je konstantní podél charakteristik. $\perp$.

Platí něco podobného pro numerická schémata?

Uvažme schéma

$$(7) \qquad \sum_{s=-M}^{M} \alpha_s v_{j+s}^{n+1} = \sum_{s=-M}^{M} \beta_s v_{j+s}^{n} \qquad \forall j\in\mathbb{Z},\ n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$$

Předpokládejme

$$(8) \qquad \left.\begin{aligned} &\alpha_0 > 0,\ \alpha_s \le 0 \\ &\beta_s \ge 0 \end{aligned}\right\} \forall s\in\{-M,\dots,M\} \quad \text{a} \quad \sum_{s=-M}^{M}\alpha_s = \sum_{s=-M}^{M}\beta_s > 0$$

Lemma:
Nechť v je řešení dif. schématu (7) s (8) a pro každé $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ je ~~$\{v_m^n\}_{m\in\mathbb{Z}}$ je definované~~ ať ex. $\max_{m\in\mathbb{Z}} v_m^n =: v^n_{max}$ a $\min_{m\in\mathbb{Z}} v_m^n =: v^n_{min}$.

a) Pak $\forall j\in\mathbb{Z};\ n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ platí:

$$v^n_{min} \le v_j^{n+1} \le v^n_{max}$$

$$\left(\Rightarrow\ v^n_{min} \le v^{n+1}_{min} \le v^{n+1}_{max} \le v^n_{max}\right)$$

b) Pokud v (7) platí pouze "$\leq$" dostaneme pouze $v^{m+1}_{max} \leq v^{m}_{max}$

"$\geq$" $\qquad v^{m+1}_{min} \geq v^{m}_{min}$.

Dk: Označme $k \in \mathbb{Z}$ tak, aby $v^{m+1}_{k} = v^{m+1}_{max}$. Potom:

$$v^{m+1}_{max} \sum_{j=-M}^{M} \alpha_j \leq \sum_{j=-M}^{M} \alpha_j v^{m+1}_{j+k} \overset{\text{"}\leq\text{"}}{=} \sum_{s=-M}^{M} \beta_s v^{m}_{s+k} \leq \sum_{s=-M}^{M} \beta_s v^{m}_{max}$$

vlastnosti α

$$= \sum_{s=-M}^{M} \alpha_s v^{m}_{max}$$

$\Rightarrow \quad v^{m+1}_{max} \leq v^{m}_{max}$.

Ostatní podobně. $\perp$

Příklad (J-J) $\quad v^{m+1}_{m} = (1+a\lambda) v^{m}_{m} - a\lambda v^{m}_{m+1}$

$a\lambda \in [-1, 0]$

$\left.\begin{array}{l} \alpha_0 = 1,\ \alpha_{-1} = \alpha_1 = 0 \\ \beta_0 = 1+a\lambda\ ;\ \beta_1 = -a\lambda\ ;\ \beta_{-1} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ Předpoklady platí!

$\Rightarrow$ Platí princip maxima!

Použijeme odhad chyby aproximace $e^{m}_{m} = v^{m}_{m} - u(t_m, x_m)$, která řeší

$$P_{k,h} e = -\varepsilon_{kh}\ ; \text{ kde } \varepsilon_{kh} \text{ je chyba diskretizace.}$$

Předpokládejme, že ε je omezená, tj. $\exists D_{kh} > 0: \forall m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}: |\varepsilon^{n}_{m}| \leq D$

(např. když je přesné řešení je hladké, a má omezené z definice).

Pak $-D_{kh} \leq P_{kh} e \leq D_{kh}$

Najdeme řešení na. $P_{kh} \phi = D_{kh}$

$\phi^{n}_{m} := t_n D_{kh}$. Pak $P_{kh} \phi = D_{kh}$ a tedy

$V := e - \phi$ splňuje $P_{kh} V \leq 0 \Rightarrow V^{n+1}_{max} \leq V^{n}_{max} \ldots\ldots \leq V^{0}_{max}$

$\Rightarrow e^{n}_{j} \leq V^{0}_{max} + \phi^{n}_{j} = e^{0}_{max} + t_n D_{kh} = t_n D_{kh} \leq T D_{kh} \to 0$

$t_n \in (0, T)$ $\qquad$ konzistence $\perp$.

$\to$ Konec přednášky 28.3.

Upwinding

Jak vyřešit rovnici s proměnným a?

$$\partial_t u + a(t,x)\,\partial_x u = 0 \quad ?$$

Můžeme použít kombinaci schémat (J-J) a (J-L)

$$v_m^{n+1} = \begin{cases} v_m^n - \dfrac{ak}{h}\left(v_{m+1}^n - v_m^n\right) & a < 0 \\[2ex] v_m^n - \dfrac{ak}{h}\left(v_m^n - v_{m-1}^n\right) & a > 0 \end{cases}$$

$$a = a(t_n, x_m)$$

- Schéma typu <u>upwind</u>. Splňuje CFL podmínku.

<u>Hraniční podmínky</u>

Bohužel numericky řešit transportní rovnici nelze, nemůžeme schéma použít až do kraje výpočetní oblasti.

Např. (J-J) potřebuje body napravo. Proto se přidávají tzv. numerické okrajové podmínky.

Např.: $v_M^{n+1} = v_{M-1}^{n+1}$

$$v_M^{n+1} = 2v_{M-1}^{n+1} - v_{M-2}^{n+1}$$

$$v_M^{n+1} = v_{M-1}^{n}$$

$$v_M^{n+1} = 2v_{M-1}^{n} - v_{M-2}^{n-1}$$

Mohou způsobit nestabilitu i stabilitu schématu.

4. Mocninné řady a Věta Cauchy–Kovalevské [Evans, sekce 4.6]

Budeme studovat kvazilineární rovnici k-tého řádu

(1) $$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(D^{k-1}u,\dots,u,x)\,D^\alpha u = f(D^{k-1}u,\dots,u,x) \quad \text{v } \Omega\subset\mathbb{R}^n$$

Ω open

Počáteční podmínky chceme určit na Γ .. hladká $(n-1)$ plocha ~~...~~

Předepisujeme $u=g_0$, $\frac{\partial u}{\partial \nu}=g_1,\dots,\frac{\partial^{k-1}}{\partial\nu^{k-1}}u=g_{k-1}$

(2)

Podmínky nazýváme Cauchyho data.

$$\frac{\partial^k u}{\partial\nu^k} = \sum_{|\alpha|=k}\binom{k}{\alpha}D^\alpha u\,\nu^\alpha = \sum_{\alpha_1+\dots+\alpha_n=k}\binom{k}{\alpha}\frac{\partial^k u}{\partial^{\alpha_1}x_1\dots\partial^{\alpha_n}x_n}\,\nu_1^{\alpha_1}\dots\nu_n^{\alpha_n}$$

a ν je ~~...~~ jednotková normála k Γ.

Na rovině Γ známe evidentně (2) celé ∇ až do řádu $k-1$.

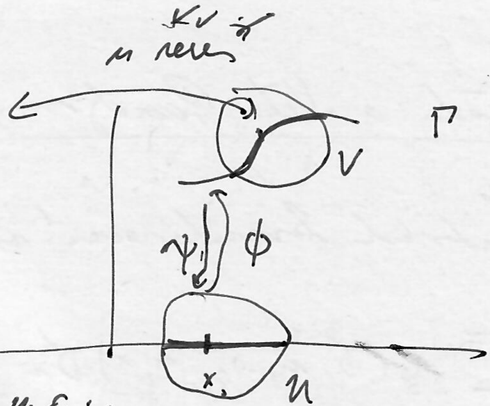
Problém nastane při výpočtu $\partial_n^k u$ na Γ. Zde je potřeba použít rovnici.

Předpokládáme $a_{(0,\dots,k)}\neq 0$ a píšeme

$$\frac{\partial^k u}{\partial x_n^k}(\ ) = \frac{1}{a_{(0,\dots,0,k)}}\Big(f-\sum_{\substack{|\alpha|=k\\ \alpha\neq(0,0,\dots,0,k)}} a_\alpha D^\alpha u\Big)$$

Atd.: vyšší derivace.

Podobně i na křivé Γ.



Γ ~~popsaná grafem fce~~

hladká $(n-1)$ plocha

lokálně popsaná C^∞ ~~...~~ regulárními homeomorfismy Φ_0

- viz př. 17 M. Špice.

~~$\Psi = (x_1, \dots, x_{n-1}, \phi(x'))$~~

Ten rozšíříme na zobrazení ϕ opět reg. homeomorfismus $\phi: U \to V$ — vybrané nějaké hladké normálové pole

$$\phi(x_1,\dots,x_n) = \Phi_0(x_1,\dots,x_{n-1}) + x_n \nu(x_1,\dots,x_{n-1})$$

$$\Phi(U \cap \{x_n = 0\}) = \Gamma \cap V$$

ψ je inverze ϕ; $\psi: V \to U$

Co se stane s fcí? $u \circ \phi$? Označme je v a dosadíme do rce $v \circ \Psi$

Zajímá nás, co se děje s $\partial_n^\ell v$

Rce má tvar $\sum_{|\alpha|=\ell} a_\alpha(\dots) D^\alpha u$

$$D^\alpha(v \circ \psi) = (\partial_{x_n}^\ell v) \circ \psi \cdot (\nabla \psi_n)^\alpha + \text{ostatní}$$

Rce: $(\partial_{x_n}^\ell v \circ \psi) \cdot \sum_{|\alpha|=\ell} a_\alpha(\dots)(\nabla\psi_n)^\alpha$ + zbytek

Chceme $\sum_{|\alpha|=\ell} a_\alpha(\dots)(\nabla\psi_n)^\alpha \neq 0$.

Dále $\Gamma = \{\psi_n = 0\} \Rightarrow \nu = c \cdot \nabla \psi_n$

$\Rightarrow$ Podm.

(3) $\sum_{|\alpha|=\ell} a_\alpha(\dots)\, \nu^\alpha(x) \neq 0$. ← Konec 29.5. – příště zopakovat!

$\boxed{\text{Definice}}$ Řekneme, že plocha $(n-1)$ dimenzionální Γ není charakteristická

pokud (3) platí pro (~~všechny při pevně zvolených argumentech~~ a_α a ν.)

Jinak v libovolném bodě (3) se nazývá charakteristická.

Pozn: Pokud Γ není charakteristická, je vždy možné spočítat

lokálně všech derivací řešení na Γ z Cauchyových dat.

~~Věta (Cauchy–Kovalevská)~~

Definice: (Reálně analytické fce): Funkci $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ nazveme (reálně) analytickou v $x_0 \in \mathbb{R}^n$ pokud ex. $U(x_0)$ a $\{c_\alpha\}_{\alpha\in(\mathbb{N}_0)^n}$ tak, že

$$f(x) = \sum_{\alpha\in(\mathbb{N}_0)^n} c_\alpha (x-x_0)^\alpha \quad x\in U(x_0).$$

Funkci f nazveme reálně analytickou v $\Omega \subset \mathbb{R}$ ot. pokud je reálně analytická v každém bodě $x_0 \in \Omega$. Značíme $f \in C^\omega(\Omega)$.

Věta (Cauchyova–Kowalevské). Uvažme ~~...~~ (systém) rovnic (1) s Cauchyovou podmínkou (2) zadanou na $(n-1)$ ploše Γ. Buď Γ zadaná rovnicí $\phi(x)=0$ implicitně, $x_0 \in \Gamma$. Nechť ϕ, Cauchyova data $g_0,\dots,g_{k-1}$ jsou reálně analytické fce v bodě x_0, a_α, f jsou reálně analytické fce všech svých proměnných v bodě $(D^{k-1}u(x_0),\dots,u(x_0),x_0)$. Nechť ~~...~~ Γ není charakteristická v bodě x_0 pro rovnici (1) a data (2). Pak ex. $U(x_0)$ a reálně analytická fce u na $U(x_0)$, která řeší rovnici (1) s (2) na $U(x_0)$. Toto řešení je na $U(x_0)$ v třídě RA fcí jednoznačné.

Důkaz: Protože v x_0 není Γ charakteristická, je možné odsud spočítat všechny derivace řešení u. Ty pak mají u ve formě Taylorovy řady. Největší problém je ukázat, že ~~poloměr konvergence této řady je kladný~~ řada konv. na ok. nějakého x_0.

Viz Evans. Pozn: Důkaz se provádí pro systémy (převedení rovnic k-tého řádu na systém 1. řádu).

v bodě $x_0 \in \Gamma$ ~~a datech (2)~~ pro rovnici (1) a data (2)

hodnoty se spočítají z (2) a x_0.

Řekneme, že Γ není charakteristická pro (1) s (2) pokud není charakteristická $\forall x_0 \in \Gamma$.

Pozn: Pokud a_α nezávisí na u, nezávisí to, jestli je plocha charakteristická na datech (2).

Komentář: Pouze lokální řešení.

o obecný problém, ale velmi malá třída pro lokální řešení C^∞.

Př: Řešme $-\Delta u = 0$ na $\mathbb{R}^2$ 1)

$u(x,0) = 0$ 2)

$\partial_y u(x,0) = \sin x$ 3)

sinh y ~~cosh x~~ sin x

Plocha $\{y=0\}$ není charakteristická: $\nu = (0,1)$

Chceme, aby $0 \neq -\nu_1^2 - \nu_2^2 = -1$ ✓.

Řešme na okolí $(0,0)$.

Počítáme derivace v $(0,0)$.

$$\partial_x^k u(0,0) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}_0 \qquad \text{z } 2)$$

$$\partial_x^k \partial_y u(0,0) = ?$$

$$\partial_y u(x,0) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\Rightarrow \partial_x^{2k} \partial_y u(0,0) = 0\,;\ \partial_x^{2k+1} \partial_y u(0,0) = (-1)^k \qquad \text{z } 3)$$

z 1) $\partial_{yy} u(x,0) = -\partial_{xx} u(x,0) = 0 \Rightarrow \partial_x^k \partial_y^2 u = 0$

$$\partial_y^3 u(x,0) = -\partial_x^2 [\partial_y u(x,0)] = \sin x$$

$$\Rightarrow \partial_x^k \partial_y u(0,0) = \partial_x^k \partial_y^3 u(0,0) = \partial_x^{k} \partial_y^{2l+1} u(0,0)$$

$$\Rightarrow u(x,y) = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{\partial_x^{2k+1} \partial_y^{2l+1} u(0,0)}{(2k+1)!(2l+1)!} x^{2k+1} y^{2l+1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!(2l+1)!} x^{2k+1} y^{2l+1} = \sin x \sinh y$$

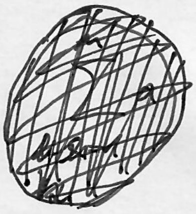
⊥.

∧ Zbytek provedte sami.

Klasifikace (lineárních) rovnic 2. řádu

Budeme studovat rovnice tvaru

$$A: \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n^2}, \quad b: \Omega \to \mathbb{R}^n, \quad c, f: \Omega \to \mathbb{R}$$



(*) $$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\,\partial_i\partial_j u(x) = \cancel{a_1} - \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\,\partial_i u(x) - c(x)\,u(x) + f(x)$$

Spočteme charakteristické směry: v

$$\sum_{j,i=1}^{n} a_{ij}(x)\, v_i v_j = 0$$

Na řešitelnost této úlohy dává odpověď lineární algebra.

Záleží na tom, jaká je signatura matice $A(x)$.

LA: Nechť A je symetrická matice. Pak existuje diagonální matice D a unitární matice U: $I = UU^T = U^TU$ takové, že $\cancel{A = UDU^T}$. $D = UAU^T$

signatura $A, D = (n_+, n_-, n_0)$

počet kladných prvků D

záporných prvků D

nulových

$\cancel{U(x-x_0)} = \underline{U_{\alpha\beta}(x-x_0)_\beta}$

Fixujeme bod x_0, najdeme D a U k $A(x_0)$ a definujeme $v(Ux) = u(x)$ $\cancel{v(x) = u(U(x))}$.

v je def. na jistém okolí bodu $y_0 = Ux_0$.

Počítejme
$$\partial_i u(x) = \partial_\alpha v(\ )\, U_{\alpha i}$$
$$\partial_i\partial_j u(x) = \partial_\alpha\partial_\beta v(\ )\, U_{\alpha i}\, U_{\beta j}$$

Dosadíme do (*):
$$\sum_{i,j=0}^{n} \cancel{a_{ij}}\, \underbrace{U_{\alpha i}\, a_{ij}(x)\, U^T_{j\beta}}_{\tilde{D}_{\alpha\beta}(x)}\, \partial_\alpha\partial_\beta v(Ux)$$
a $\tilde{D}_{\alpha\beta}(x_0) = D_{\alpha\beta}$ diagonální

$\longrightarrow$ V jistém bodě jsme rovnici zjednodušili.

Def: Rovnici tvaru (*) s $A(x_0)$ diagonální [illegible] nazýváme rovnicí v kanonickém tvaru v bodě x_0.

Př: $D = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$ ... žádné char. plochy, směry

$D = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 0 \end{pmatrix}$ ... 1 char. směr $(0,1)$

$D = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$ ... 2 char. směry $(1,1)$ a $(1,-1)$

Definice: Uvažme rci (9), $x_0 \in \mathbb{R}^n$ a odpovídající matici D ve signatuře (n_+, n_-, n_0).

Řekneme, že rovnice (9) je v x_0

- eliptická, je-li $n_+ = n$ nebo $n_- = n$
- hyperbolická, je-li ($n_+ = n-1$ a $n_- = 1$) nebo ($n_+ = 1$ a $n_- = n-1$)
- parabolická, je-li $n_0 > 0$
- ultrahyperbolická jinak

Př: • Vlnová rce je hyperbolická

• RVT je parabolická

• Laplaceova / Poissonova rce je eliptická.

Příklad (CK věta) dle [illegible]

Převedte úlohu $F(x,y,u,u_x,u_y)=0$ na tvar CK

BC: $u(x,0)=u_0(x)$

Derivujme dle y: $\partial_2 F + \partial_3 F \partial_y u + \partial_4 F \partial_x \partial_y u + \partial_5 F \partial_y^2 u = 0$

Tvar CK $\quad 0\cdot \partial_x^2 u + \partial_4 F \partial_{xy} u + \partial_5 F(\,)\, \partial_y^2 u = -\partial_2 F - \partial_3 F \partial_y u$

$\nu=(0,1)$ Tedy, pokud ~~[illegible]~~ v bodě $(x_0,0)$

$\partial_5 F(x_0, y, u(x_0,0), \partial_x u(x_0,0), \partial_y u(x_0,0)) \neq 0$, je možné

~~[illegible]~~ použít větu CK.

Co je to $\partial_y u(x,0)$? Je potřeba ji zvolit "vhodně", tak aby pro řešení

byla automaticky splněna! Tj. nepřímo ji z rovnice:

$$F(x,0,u_0(x,0),\partial_x u_0(x,0),u_y(0,x))=0.$$

Postačující podm. pro použití Věty o implicitní funkci je $\partial_5 F(x_0,\ldots,z_0)\neq$

Volba bodu pro řešení $(x_0,0)$ fix, $\to u(x_0,0)$, $\partial_x u(x_0,0)$,

Najdu z_0 tak, aby $F(\underbrace{x_0,0,u_0(x_0,0),\partial_x u(x_0,0),z_0}_{X})=0$.

Podmínky: $\partial_5 F(X)\neq 0$.

Najdu u_y $\partial_y u(x_0,0)$.

Najdu řešení rce.

1.

5. Vlnová rovnice

Def: Cauchyova úloha pro vlnovou rovnici

Buď $T>0$, $c>0$, $n\ge 1$, $Q_T := (0,T)\times\mathbb{R}^n$, $f\in C(Q_T)$, $g_0\in C^2(\mathbb{R}^n)$, $g_1\in C^1(\mathbb{R}^n)$. Řekneme, že $u: \overline{Q_T}\to\mathbb{R}$ řeší Cauchyovu úlohu pro vlnovou rovnici (VR) s pravou stranou f a počátečními podmínkami g_0, g_1 v klasickém smyslu, pokud

a) $u\in C^2(\overline{Q_T})$

b) $\frac{1}{c^2}\partial_t^2 u - \Delta u = f$ v Q_T

c) $u(0,x) = g_0(x)$, $\partial_t u(0,x) = g_1(x)$ v $\mathbb{R}^n$

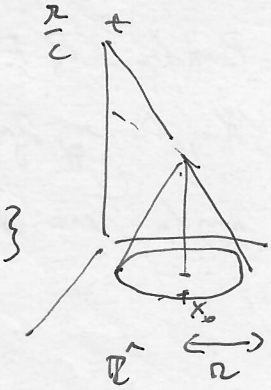
Pozn: • Modeluje šíření vlny rychlostí $c>0$ prostorem, g_0 udává počáteční výchylku, g_1 počáteční rychlost.

• Plocha $\{t=0\}$ není charakteristická, pro lokální řešení je tedy možné využít věty C.K.

Nejdříve dokážeme větu o šíření informace.

Definice: Buď $x_0\in\mathbb{R}^n$, $0<R<cT$. Označme

$$Z_R(x_0) := \{(t,x)\in Q_T,\ 0<ct<R,\ |x-x_0|<R-ct\}$$



Z_R je určený svým sklonem c, vrchol $V=[\frac{R}{c}, x_0]$

Věta: (O jednoznačnosti pro oblast závislosti): Buď $R>0$, $x_0\in\mathbb{R}^n$, $c>0$, $u: \overline{Z_R(x_0)}\to\mathbb{R}$ taková, že

a) $u\in C^2(\overline{Z_R(x_0)})$,

b) $\frac{1}{c^2}\partial_t^2 u - \Delta u = 0$ v $Z_R(x_0)$

c) $u(0,x) = \partial_t u(0,x) = 0$ v $U(x_0,R)$ pro $|x-x_0|<R$, $x\in\mathbb{R}^n$.

Potom $u = 0$ v $\overline{Z_R(x_0)}$.

Pozn: Derivace jsou prodloužené spojitě na $\overline{Z_R(x_0)}$

Dk: Nejdříve lemma o integraci

$\boxed{\text{Lemma 1}}$ Buď $f \in C^1\left(\overline{U(x_0,\frac{R}{c})}\right)$. Pak

$$\frac{d}{dt}\int_{U(x_0,\,t)} f(x)\,dx = +\int_{\partial U(x_0,\,t)} f\,dS \qquad t\in\left(0,\tfrac{R}{c}\right)$$

Dk: Důsledek věty o divergenci - Gauss-Green. $\perp$

$$\frac{d}{dt}\int_{U(x_0,\frac{R}{c}-t)} f(x)\,dx = \frac{d}{dt}\int_{U(x_0,1)} f\left(x_0+(y-x_0)\left(\tfrac{R}{c}-t\right)\right)\left(\tfrac{R}{c}-t\right)^n dy =$$

$$x_0-y=(x_0-x)\left(\frac{R}{c}-t\right)^{-1}$$

$$(x_0-y)\left(\frac{R}{c}-t\right)=x_0-x$$

$$= \int_{U(x_0,1)} (\nabla f)(\ldots)\,(x_0-y)\left(\frac{R}{c}-t\right)^n dy =$$

$$= \int_{U(x_0,\frac{R}{c}-t)} (\nabla f)(x)\cdot(x_0-x)\left(\frac{R}{c}-t\right)^{-1} dx$$

Spočte se přímo z def. plošného integrálu. Jinak viz Evans-Gariepy.

Intuitivně

$$\int_{U(x_0,t)} f = \int_0^t \int_{\partial U(x_0,r)} f(x)\,dS(x)\,dr$$

a derivace dle horní meze.

$\boxed{\text{L2}}$ Je-li $F\in C^1\left(\overline{Z_R(x_0)}\right)$, platí $\perp$

$$\frac{d}{dt}\int_{U(x_0,\frac{R}{c}-t)} F(t,x)\,dx = \int_{U(x_0,\frac{R}{c}-t)} \partial_1 F(t,x)\,dx - \int_{\partial U(x_0,\frac{R}{c}-t)} F(t,x)\,dS(x)$$

(Náznak)

Dk: Stačí položit $G(s,t) := \int_{U(x_0,s)} F(t,x)\,dx$. Pak $\partial_s G(s,t) = \int_{\partial U(x_0,s)} F(t,x)\,dS(x)$

$\partial_t G(s,t) = \int_{U(x_0,s)} \partial_1 F(t,x)\,ds$ a konečně: $\partial_t\left[G\left(\frac{R}{c}-t,t\right)\right] = \partial_s G(\ldots)(-1) + \partial_t G(\ldots)$ $\perp$

Věta L3:

Dk Věty: (ala Evans 2.5 Thm 6)

Definujeme

$$e(t) := \frac{1}{2} \int_{U(x_0, \frac{R}{c} - t)} \frac{1}{c^2} u_t^2(t,x) + |\nabla u(t,x)|^2 \, dx \quad t \in [0, \tfrac{R}{c}].$$

Zřejmě $e(0) = 0$.

Počítejme

$$\frac{d}{dt} e(t) = \frac{2}{2} \int_{U(x_0, \frac{R}{c} - t)} \frac{1}{c^2} \partial_t^2 u \, \partial_t u + \partial_t \nabla u \, \nabla u \, dx -$$

$$- \frac{1}{2} \int_{\partial U(x_0, \frac{R}{c} - t)} \frac{1}{c^2} u_t^2 + |\nabla u|^2 \, dS(x) = *$$

$$\int_{U(x_0, \frac{R}{c} - t)} \frac{1}{c^2} \partial_t^2 u \, \partial_t u = \int_{U(x_0, \frac{R}{c} - t)} \Delta u \, \partial_t u = - \int_{U(x_0, \frac{R}{c} - t)} \nabla u \, \partial_t \nabla u + \int_{\partial U(x_0, \frac{R}{c} - t)} \nabla u \cdot \nu \cdot \partial_t u$$

Pokračování!

$$(*) = \frac{1}{2} \int_{\partial U(x_0, \frac{R}{c} - t)} 2 \nabla u \cdot \nu \cdot \partial_t u - \frac{|\nu|^2}{c^2} u_t^2 - |\nabla u|^2 \, dS(x) =$$

$$- \frac{1}{2} \int_{\partial U(x_0, \frac{R}{c} - t)} | \nu u_t - \nabla u |^2 \, dS(x) \leq 0$$

$\Rightarrow e(t) \equiv 0$ na $[0, \frac{R}{c}] \Rightarrow u \equiv 0$ na $\overline{Z_R(x_0)}$. $\perp$.

$\boxed{\text{Lemma 3}}$ Buď $F \in C^1(\overline{U(x_0, R)})$. Pak $\int_{U(x_0,R)} \operatorname{div} F = \int_{\partial U(x_0,R)} F \cdot \vec{\nu}$; ν j. 1 vnější normála

(Gauss-Green-Ostrogradskij)

Buď $F \in C^2(\overline{U(x_0, R)})$, $\varphi \in C^1(\overline{U})$. Pak $\int_U \Delta u \cdot \varphi = \int_{\partial U} \nabla u \cdot \nu \cdot \varphi - \int_U \nabla u \nabla \varphi$

$(\operatorname{div}(\nabla u \varphi) = \Delta u \varphi + \nabla u \nabla \varphi)$

Well posedness

Zajímá nás jak rychle může řešení růst – v jaké normě?

Věta (Energetický odhad) Buď u řešení Cauchyovy úlohy pro vlnovou rci. Ex. $K>0$ (které nezávisí na c, T)

Ať má u má ~~nosič~~ nosič v $U(0,R)\times[0,+\infty)$ a data f, g_0, g_1 (f, g_0, g_1)

$$\forall t\in(0,T): \int_{\mathbb{R}^n} |\partial_t u|^2(t,x) + |\nabla u(t,x)|^2 \le K\left(\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n} |f(t,x)|^2 + \int_{\mathbb{R}^n} |g_1|^2+|\nabla g_0|^2\right)$$

Pak $\forall \alpha>0$ platí:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{c^2}(|u_t|^2(t) + |\nabla u|^2(t)) \le \int_0^t \alpha\, e^{\frac{c^2}{\alpha}(t-s)}\int_{\mathbb{R}^n} |f|^2(s,x)\,dx\,ds + e^{\frac{c^2}{\alpha}t}\int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{1}{c^2}|g_1|^2+|\nabla g_0|^2\right)dx.$$

Dk: Násobme VR u_t a integrujme přes $\mathbb{R}^n$ v čase $t\ge 0$, pro $c=1$.

$$0 = \int_{\mathbb{R}^n} u_{tt}u_t - \int_{\mathbb{R}^n} \Delta u\, u_t - \int_{\mathbb{R}^n} f u_t = \frac12\int_{\mathbb{R}^n} \frac{d}{dt}|u_t|^2 + \frac{d}{dt}|\nabla u|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^n} f u_t$$

$$-\left(\int_{\mathbb{R}^n} f^2\right)^{1/2}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|u_t|^2\right)^{1/2} \ge \frac12\int_{\mathbb{R}^n} \frac{d}{dt}|u_t|^2 + \frac{d}{dt}|\nabla u|^2 - |f|^2 - |u_t|^2\,dx$$

$$\cancel{\Rightarrow \frac12\int_{\mathbb{R}^n} e^{t}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^n}(|u_t|^2e^{-t}) - \int_{\mathbb{R}^n}(|f|^2) + \int\frac{d}{dt}|\nabla u|^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^n} |u_t|^2+|\nabla u|^2 - \int_{\mathbb{R}^n} |u_t|^2+|\nabla u|^2 \le \int_{\mathbb{R}^n} |f|^2 \qquad /\cdot e^{-t}$$

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-t}\int_{\mathbb{R}^n} |u_t|^2+|\nabla u|^2\right) \le e^{-t}\int_{\mathbb{R}^n} |f|^2$$

$$e^{-t}\int_{\mathbb{R}^n} |u_t|^2+|\nabla u|^2 \le \left(\int_0^t e^{-t}\int_{\mathbb{R}^n} |f|^2 + \int_{\mathbb{R}^n} |g_1|^2+|\nabla g_0|^2\right)$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u_t|^2+|\nabla u|^2 \le e^{t}\left(\int_0^t e^{-s}\int_{\mathbb{R}^n} |f|^2 ds + \int_{\mathbb{R}^n} |g_1|^2+|\nabla g_0|^2\right)$$

$\perp$

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{c^2}|u_t|^2 + |Du|^2 - c^2\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{c^2}|u_t|^2 + |Du|^2 \le \int_{\mathbb{R}^3} |f|^2 \qquad \Big/ \cdot e^{-tc^2}$$

$$\frac{d}{dt}\, e^{-tc^2} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{c^2}|u_t|^2 + |Du|^2$$

Pozn: Předpoklad omezenosti nosiče je podstatný!

Např: $u(t,x) = 1$ je řešení s $RHS = 0$.

Existence řešení

Chceme řešit úlohu (b),(c) ve smyslu distribucí. Lze ji zapsat v následujícím tvaru (jsou-li data hladká i řešení) pro fci $U := u\cdot\chi_{(0,+\infty)}(t)$, f prodloužíme 0 pro $t<0$.

$$\frac{1}{c^2}\partial_t^2 U - \Delta U = f + \frac{1}{c^2}\delta_0(t)\otimes g_1 + \frac{d}{dt}\delta_0(t)\otimes g_0\frac{1}{c^2} \quad \text{v } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n+1}) \qquad (++)$$

Dk: Nejprve vezmeme $\varphi\in\mathcal{D}((0,+\infty)\times\mathbb{R}^n) \Rightarrow$ bodově platí $\frac{1}{c^2}\partial_t^2 u - \Delta u = f$ $\forall x\in\mathbb{R}^n$, $t>0$.

Vezmeme nyní $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, takové, že $\forall x\in\mathbb{R}^n, \exists t>0$: φ je konstantní na úsečce $\{\alpha(t,x);\ \alpha\in[-1,1]\}$. Pak

$$\int_{\mathbb{R}^{n+1}} U\left(\frac{1}{c^2}\partial_t^2\varphi - \Delta\varphi\right) = \int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^n} -\partial_t U\frac{1}{c^2}\partial_t\varphi + \int_{\mathbb{R}^n}\underbrace{\left[U\frac{1}{c^2}\partial_t\varphi\right]_0^{+\infty}}_{=0}$$

$$= \int_0^{+\infty}\partial_t^2 U\frac{1}{c^2}\varphi - \int_{\mathbb{R}^n}\left[\partial_t U\frac{1}{c^2}\varphi\right]_0^{+\infty} + \dots$$

$$= \int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^n}\partial_t^2 U\frac{1}{c^2}\varphi + \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{c^2}\partial_t U(0)\varphi - \int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{c^2}U(0)\partial_t\varphi}$$

$$\left(\frac{1}{c^2}g_1^{(x)}\otimes\delta_0(t)\right)(\varphi) + \left(\frac{1}{c^2}g_0^{(x)}\otimes\delta_0'(t)\right)(\varphi)$$

$\perp$.

Z teorie distribucí víme, že stačí řešit úlohu

$$(+)\qquad \frac{1}{c^2}\partial_t^2 V - \Delta V = \delta(t,x) \quad \text{na } \mathbb{R}^{n+1}.$$

Pokud se nám tohle podaří vyřešit a nalézt řešení V, najdeme řešení problému s (nenulovou) pravou stranou F jako $V*F$.

Pokud je tato konvoluce definovaná.

$$\left(\frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \Delta\right)V*F = \left(\frac{1}{c^2}\partial_t^2 V - \Delta V\right)*F = \delta*F = F.$$

Navíc nás zajímá vývoj řešení pro $t>0$. Hledejme tedy V, které je $V=0$ pro $t<0$.

Proveďme Fourierovu transformaci na $(+)_x$ v prom. x v $\mathcal{S}'$ značí $\hat{}$.

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}^n}\otimes\delta_t(0)\right)(\varphi)$$

$$\hat\delta(t,x)(\varphi) = \hat\varphi(0,0) = \int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}^n}e^{-ix\xi}\varphi(t,x)\,dx\Big|_{\substack{\xi=0\\ t=0}} = \int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}^n}\varphi(0,\xi)\,d\xi$$

Dokonce $\widehat{\delta_{t,x}} = \delta_t \otimes \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}$

Opakujme $\widehat{\partial_{x_j} u} = i\xi_j \hat{u}$.

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\hat{V}(t,\xi) + |\xi|^2 \hat{V}(t,\xi) = \delta_t \otimes \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}$$

Považujme teď ξ za parametr a chceme vyřešit rci v proměnné t.

F. S. je $\sin(c|\xi|t)$; $\cos(c|\xi|t)$

Chceme vysimulovat p.s. $\delta_t \otimes \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}$. Hledáme řešení tvaru

$$v(t,\xi) = \begin{cases} \alpha\cos(c|\xi|t) + \beta\sin(c|\xi|t) & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}$$

~~[illegible]~~

~~[illegible]~~

$\boxed{\text{Lemma:}}$ v def. výše řeší předepsanou rci: $\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} v(t,\xi) + |\xi|^2 v(t,\xi) = \delta_t \otimes \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}$ v $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$

Pokud je v spojité v 0 a ~~[illegible]~~ v' má v 0 skok velikosti $c^2 \cdot \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}$

$$\left(\lim_{t\to 0+} v' - \lim_{t\to 0-} v' = c^2 / (\sqrt{2\pi})^n\right)$$

Bez Dk:

Tj. $\alpha = 0$. Pak $v(t) = \begin{cases} \beta c|\xi|\cos(c|\xi|t) & t>0 \\ 0 & t\le 0\end{cases}$

$\Rightarrow \beta c|\xi| = \frac{c^2}{(\sqrt{2\pi})^n}$ tj. $\beta = \frac{c}{(\sqrt{2\pi})^n}\cdot\frac{1}{|\xi|}$

Hledaná distribuce je pak $\hat V(t,\xi) = \frac{c}{(\sqrt{2\pi})^n}\,\frac{\sin(c|\xi|t)}{|\xi|}$

Je potřeba nalézt inverzní FT! $\hat V(t,\cdot)\in L^2(\mathbb R)\setminus L^1(\mathbb R)$ v 1D.

ale $\notin L^2(\mathbb R)\cup L^1(\mathbb R)$ v nD, $n>1$.

$\boxed{\text{Konec 10.4.}}$

Inverzi je potřeba hledat v $\mathcal S'(\mathbb R^{n+1})$!

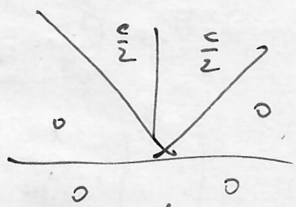
Definice: Reg. distribuci generovanou fcí V nazveme fundamentální řešení vlnové rovnice pro $n = 1$.

Nejjednodušší v 1D: $n = 1$.

a) $g(s) := \chi_{(-a,a)}(s)$; $a > 0$.

$$\hat g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{a} e^{-ix\xi}\,d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{e^{-ix\xi}}{-ix}\right]_{-a}^{a} = \frac{2\cdot 1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{1}{x}\sin(xa) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{\sin(|x|a)}{|x|}$$

Vol $a = ct$ a násob g $\frac{c}{2}$.



Tedy $V(t,x) := \frac{c}{2}\,\chi_{(-ct,ct)}(x)\cdot\chi_{(0,\infty)}(t)$

DÚ: Dosadit do rce a ověřit, že $V(t,x)$ řeší ve smyslu distribucí $\frac{1}{c^2}\partial_t^2 u - \partial_x^2 u = \delta_{(0,0)}$

Spočtěme nyní řešení (++) tj. $(f = 0$ pro $t<0)$

$$V * \left(f + \frac{1}{c^2}\delta_0(t)\otimes g_1 + \frac{1}{c^2}\delta_0'(t)\otimes g_0\right);\ \checkmark$$

$$V * f(t,x) = \int_0^{+\infty}\int_{-cs}^{cs}\frac{c}{2} f(t-s,x-y)\,dy\,ds = \left|\begin{array}{l} x-y = z \\ dz = dy \\ t-s = r \\ s = t-r\end{array}\right.$$

$$= \frac{c}{2}\int_0^{t}\left(\int_{x-c(t-r)}^{x+c(t-r)} f(r,z)\,dz\right)dr$$

$$\frac{1}{c^2}\left(V * \delta_0(t)\otimes g_1\right)(\varphi) = \frac{1}{c^2}\int_0^{+\infty}\int_{-ct}^{ct} V(t,x)\int g_1(y)\,\varphi(t,x+y)\,dy\,dx\,dt$$

$$= \int_0^{+\infty}\int_{\mathbb R}\varphi(t,z)\left(\frac{c}{2c^2}\int_{z-ct}^{z+ct} g_1(s)\,ds\right)dz\,dt \Rightarrow \frac{1}{2c}\int_{z-ct}^{z+ct} g_1(s)\,ds$$

$$\frac{1}{c^2}\left(V * \delta_0'\otimes g_0\right)(\varphi) = -\int_0^{+\infty}\int_{-ct}^{ct}\frac{c}{2c^2}\int_{\mathbb R} g_0(y)\,\partial_t\varphi(t,x+y)\,dy\,dx\,dt = \int_{\mathbb R}\int_0^{+\infty}\partial_t\left(\int_{-ct}^{ct}\frac{1}{2c}\,g_0(z-x)\,dx\right)\varphi(t,z)\,dt\,dz$$

$=$

$$\frac{1}{c^2}\left[V*(\delta_0'\otimes g_0)\right](\varphi) = -\int_0^{+\infty}\int_{-ct}^{ct}\frac{c}{2c^2}\int_{\mathbb{R}} g_0(y)\,\partial_t\varphi(t,\underbrace{x+y}_{z})\,dy\,dx\,dt$$

$$\cancel{= -\int_0^{+\infty}\int_{-ct}^{ct}\frac{1}{2c}\int_{\mathbb{R}} g_0(z-x)\,\partial_t\varphi(t,z)\,dz\,dx\,dt} \longleftarrow$$

$$\cancel{= -\int_0^{+\infty}\frac{1}{2c}\int_{\mathbb{R}}\int_{-ct}^{ct} g_0(y)\,\partial_t\varphi(t,x+y)\,dy\,x}$$

$$\cancel{= -\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}}\int_{-ct}^{ct} g_0(z-x)\int_{-ct}}$$

$$= -\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}}\int_{-ct}^{ct}\frac{1}{2c}\,g(z-x)\,dx\;\partial_t\varphi(t,z)\,dz\,dt$$

$$= \int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{2\cancel{c}}\left[g(z-ct)+g(z+ct)\right]\varphi(t,z)\,dz\,dt$$

$$\longrightarrow \frac{1}{2\cancel{c}}\left[g(x-ct)+g(x+ct)\right]$$

Věta: Cauchyův problém (q), t, c, kde $f\in C^1(\mathbb{R}^2)$, $g_0\in C^2(\mathbb{R})$, $g_1\in C^1(\mathbb{R})$ $(n=1)$

má jednoznačné řešení $u\in C^2(\mathbb{R}^2)$ a platí

$$u(t,x)=\frac{1}{2\cancel{c}}\left[g_0(x+ct)+g_0(x-ct)\right]+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g_1(s)\,ds$$

$$+\frac{\cancel{c}}{2}\int_0^t\int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} f(\sigma,\tau)\,d\sigma\,d\tau$$

Dk: Vyjádřen! $\perp$ [Pozn: Z výsledku plynou odhady pro L^∞ normy řešení.]

b) $n=3$:

Vladimirov (9.40)

$$\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\sin a|\xi|t}{|\xi|}\right) = \frac{1}{4\pi a t}\,\delta_{S_{at}} \cdot (2\pi)^{3/2}$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{F}^{-1}\left(c\cdot\frac{\sin c|\xi|t}{(2\pi)^{3/2}|\xi|}\right) = \frac{c\,1}{4\pi c t}\,\delta_{S_{ct}}(x), \text{ kde } \delta_{S_{ct}}(\varphi) = \int_{\partial U(0,ct)} \varphi(x)\,dS(x).$$

Def: Distribuci $V_3 = \frac{1}{4\pi c t}\,\delta_{S_{ct}}\,\chi^{(t)}_{(0,+\infty)}$ nazveme fundamentální řešení vlnové rovnice v $n=3$.

Pozn: Fundamentální řešení průměruje hodnoty φ přes sféru $\partial U(0,ct)$.

Příslušná konvoluce:

$$V_3 * f = V_3(t,x)\Big(f(s,y)\big(\varphi(t+s,x+y)\big)\Big) =$$

$$dt = \frac{d\tau}{c}, \quad ct = \tau$$

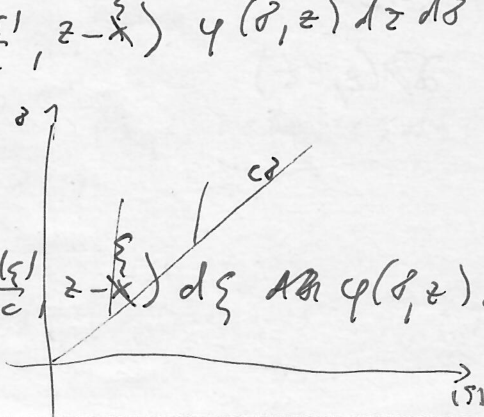
$$\frac{1}{4\pi c}\int_0^{+\infty}\frac{1}{t}\int_{S_{ct}}\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^n} f(s,y)\,\varphi(s+t,y+x)\,dy\,ds\,dx\,dt =$$

$$\frac{1}{4\pi c}\underbrace{\int_0^{+\infty}\int_{S_\tau}}\frac{1}{|\xi|}\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^n} f(s,y)\,\varphi\left(s+\frac{\tau}{c},y+x\right)dy\,ds\,\underbrace{dx\,d\tau}_{d\xi} =$$

$$\frac{1}{4\pi c}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{|\xi|}\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^n} f(s,y)\,\varphi\Big(\underbrace{s+\frac{|\xi|}{c}}_{\tau}, \underbrace{y+x}_{z}\Big)\,dy\,ds\,d\xi =$$

with $y = z-x$, $x = \xi$, $s = \tau - \frac{|\xi|}{c}$, s from $\frac{|\xi|}{c}$:

$$\frac{1}{4\pi c}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{|\xi|}\int_{\frac{|\xi|}{c}}^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^n} f\left(\tau-\frac{|\xi|}{c}, z-\xi\right)\varphi(\tau,z)\,dz\,d\tau\,d\xi$$



$$= \frac{1}{4\pi c}\int_{\mathbb{R}^n}\int_0^{+\infty}\int_{U(0,c\tau)} \frac{1}{|\xi|}\, f\left(\tau-\frac{|\xi|}{c}, z-\xi\right)d\xi\;\varphi(\tau,z)\,d\tau\,dz = \frac{1}{4\pi c}\int_{\mathbb{R}^n}\int_0^{+\infty}\int_{U(z, c\tau)}\frac{1}{|z-\zeta|}\, f\left(\tau-\frac{|z-\zeta|}{c}, \zeta\right)d\zeta\;\varphi(\tau,z)\,d\tau\,dz$$

$\zeta = z-\xi$

Podobně pro RHS: $\delta_t \otimes g_1$:

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^{+\infty}\int_{S_{ct}} \frac{1}{\cancel{4\pi} t}\int_{\mathbb{R}^n} \overset{z-x}{g_1(y)}\,\varphi(\overset{t}{\cancel{t}},\overset{z}{x+y})\,d\overset{z}{y}\,dx\,dt =$$

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^3}\int_{S_{ct}} \frac{1}{t}\, g_1(z-x)\,dS(x)\,\varphi(t,z)\,dz\,dt$$

$$\longrightarrow \frac{1}{4\pi t}\int_{\partial U(z,ct)} \frac{1}{t}\, g_1(\xi)\,dS(\xi)$$

$$-\frac{1}{4\pi}\int_0^{+\infty}\int_{S_{ct}}\frac{1}{t}\int_{\mathbb{R}^n} g_0(y)\,\partial_t\varphi(t,x+y)\,dy\,dS(x)\,dt =$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\int_0^{+\infty}\int_{S_{ct}}\frac{1}{t}\int_{\mathbb{R}^3} g_0(z-x)\,\partial_t\varphi(t,z)\,dz\,dS(x)\,dt$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{1}{t}\int_{S_{ct}} g_0(z-x)\,dS(x)\right)\partial_t\varphi(t,z)\,dz\,dt =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{t}\int_{\underset{\partial U(z,ct)}{S_{ct}}} g_0\overset{\xi}{(z-x)}\,\overset{dS(\xi)}{dS(x)}\right)\varphi(t,z)\,dz\,dt$$

Věta: Je-li $f \in C^2([0,+\infty) \times \mathbb{R}^3)$, $g_0 \in C^3(\mathbb{R}^3)$ a $g_1 \in C^2(\mathbb{R}^3)$ ~~platí~~

Klasickým řešení Cauchyova problému ex. a je dáno vzorcem

$$u(t,x) = \frac{1}{4\pi} \int_{U(x,ct)} \frac{1}{|x-\xi|} f\left(t - \frac{|x-\xi|}{c}, \xi\right) d\xi + \frac{1}{4\pi t c^2} \int_{\partial U(x,ct)} g_1(\xi)\, dS(\xi) +$$

$$\frac{1}{4\pi c^2} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{t} \int_{\partial U(x,ct)} g_0(\xi)\, dS(\xi)\right) = u_1 + u_2 + u_3, \qquad t > 0.$$

Důkaz. Viz Vladimirov Equations of mathematical physics, 13.4 $\perp$

Pozn: Je nutné f předávat alespoň L^∞ nutné? $\perp$

$$u_1(t,x) = \frac{1}{4\pi} \int_{U(0,1)} \frac{\boxed{}}{\cancel{c}t|z|} f(t - t|z|, x - ctz)\, (ct)^3\, dz$$

Subst. $z = \dfrac{\xi - x}{ct}$; $dz = \left(\dfrac{1}{ct}\right)^3 d\xi$ $\quad = \dfrac{1}{4\pi} \displaystyle\int_{U(0,1)} \frac{1}{|z|} f(t(1-|z|), x - ctz)\, (ct)^2\, dz$

Protože $\dfrac{1}{|z|} \in L^1(0,1)$ a $f \in C^2$, lze der. dle par. $\perp$.

Navíc $u(0,x) = u_t(0,x) = 0$. lze. dle.

$$u_2 = \frac{1}{4\pi t c^2} \int_{\partial U(x,ct)} g_1(\xi)\, dS(\xi) = \left| z = \frac{\xi - x}{ct} \right| = \frac{1}{4\pi t c^2} \int_{\partial U(0,1)} g_1(x + ctz)\, dS(z)\, (ct)^2$$

$$\Rightarrow u_2 \in C^2$$

Podobně u_3.

$$\frac{\partial}{\partial t} u_2(t,x) = \underbrace{\int_{\partial U(0,1)} \nabla g_1(x + ctz) \cdot cz\, dS(z) \cdot \frac{t}{4\pi}}_{\substack{\to 0 \\ t \to 0+}} + \underbrace{\frac{c}{4\pi} \int_{\partial U(0,1)} g_1(x + ctz)}_{\to \cancel{c}\, g_1(x)}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u_2(t,x) = \int_{\partial U} \dots dS \cdot t + \frac{1}{4\pi} \int_{\partial U} \nabla g_1(x + ctz) \cdot cz + \nabla g_1(\;)\, cz$$

$\perp$

$\underline{n=2}$: Metoda spuštění!

$$V_3(t,x) = \frac{1}{4\pi t}\,\delta_{S_{ct}}(x)\,\chi_{(0,+\infty)}(t)$$

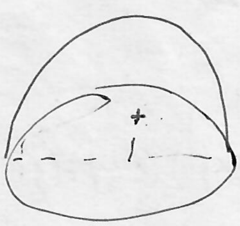
Přeintegrujeme přes x_3 tj. zkusíme dosadit test. fci tvaru

$$\varphi(t,x_1,x_2,x_3) = \psi(t,x_1,x_2)\otimes 1(x_3)$$

$$V_3(\psi\otimes 1) = \int_0^{+\infty} \underbrace{\frac{1}{4\pi t}\int_{\partial\mathcal{U}(0,ct)} \psi(t,x_1,x_2)\,dS(x)}\,dt$$

ψ nezávisí na x_3!

$$\int_{\substack{\mathcal{U}(0,ct)\\ \subset\mathbb{R}^2}} \psi(t,x_1,x_2)\,\frac{2ct}{\sqrt{(ct)^2-x_1^2-x_2^2}}$$



Par. x_1, x_2, $\sqrt{(ct)^2-x_1^2-x_2^2}$

$$D:\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\\ \frac{x_1}{\sqrt{\ }} & \frac{x_2}{\sqrt{\ }}\end{pmatrix}$$

$$(\times):\left(\frac{x_1}{\sqrt{\ }},\ \frac{x_2}{\sqrt{\ }},\ 1\right) \qquad \|\times\| = \sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+(ct)^2-x_1^2-x_2^2}{(ct)^2-(x_1^2+x_2^2)}} =$$

$$= \frac{ct}{\sqrt{(ct)^2-x_1^2-x_2^2}}.$$

$$V_3(\psi\otimes 1) = \int_0^{+\infty}\int_{\substack{\mathcal{U}(0,ct)\\ \subset\mathbb{R}^2}} \frac{1}{2\pi}\,\frac{c}{\sqrt{(ct)^2-|x|^2}}\,\psi(t,x)\,dx\,dt$$

$$= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^2} \frac{c}{2\pi}\,\frac{1}{\sqrt{(ct)^2-|x|^2}}\,\cancel{\chi\{ct-|x|>0\}}\;\chi_{(0,+\infty)}(ct-|x|)\,\psi(t,x)\,dx\,dt$$

Definice: Distribuci V_2. Def $V_2(t,x) = \frac{c}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{(ct)^2 - |x|^2}} \cdot \chi_{(0,+\infty)}(ct - |x|)$

nazveme fundamentálním řešením vlnové rovnice pro $n = 2$.

Věta: Je-li $f \in C^2([0,+\infty) \times \mathbb{R}^2)$, $g_0 \in C^3(\mathbb{R}^2)$, $g_1 \in C^2(\mathbb{R}^2)$, pak

klasické řešení ~~[illegible]~~ Cauchyovy úlohy pro vlnovou rovnici

je dáno vzorcem:

$$u(t,x) = \frac{c}{2\pi} \int_0^t \int_{U(x,c(t-\tau))} \frac{f(\tau,\xi)}{\sqrt{c^2(t-\tau)^2 - |x-\xi|^2}} + \frac{1}{2\pi c} \int_{U(x,ct)} \frac{g_1(\xi)}{\sqrt{c^2t^2 - |x-\xi|^2}}$$

$$+ \frac{1}{2\pi c} \frac{\partial}{\partial t} \int_{U(x,ct)} \frac{g_0(\xi)}{\sqrt{c^2t^2 - |x-\xi|^2}} \, d\xi \quad \text{pro } t > 0.$$

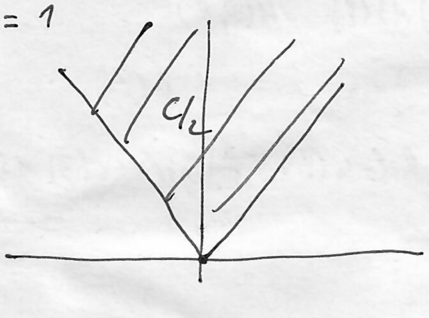
Difúze vln:

$\longleftarrow$ do 12.4. fundamentální řešení a věta pro $n = 1$

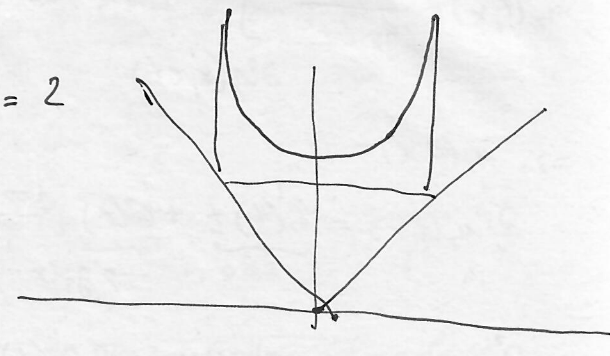
Příště – Věty pro $n = 2,3$ bez použití konvoluce + difúze řešení vln.

Ukázání rozdílů mezi fundamentálními řešeními $n = 1, 2, 3$.

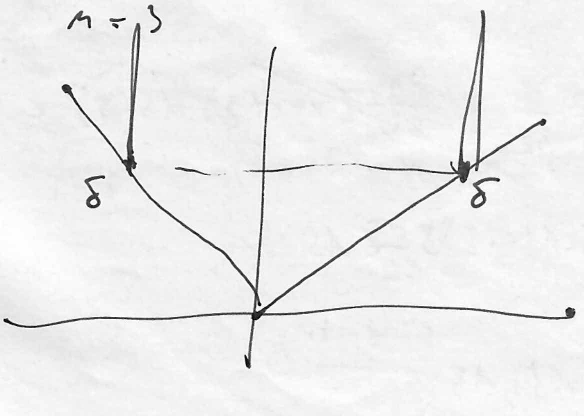
$n = 1$



$n = 2$



$n = 3$



Cvičení: Je V_2 v L^1_{loc}?

$$V_2(t,x) = \frac{c}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{(ct)^2 - |x|^2}} \chi_{(0,+\infty)}(ct - |x|)$$

Pozn: $u_{tt} - \Delta u = f$

~~vtt~~ $u(t,x) := v(-t,x)$, změna v RHS $f(-t,\cdot)$

$(v_{tt} - \Delta v)(-t,x) = f(t,x)$

$(v_{tt} - \Delta v)(t,x) = f(-t,x)$ + poč. podm.
$t < 0$

Prověříme:

$$\int_{U(0,ct)} \frac{1}{\sqrt{(ct)^2 - |x|^2}} \, dx = \int_0^{ct} \int_{\partial U(0,s)} \frac{1}{\sqrt{(ct)^2 - s^2}} \, dS(x) \, ds =$$

$$\int_0^{ct} \frac{\cancel{\mathcal{H}_{n}}\, s^{\,n-1} \quad 2\pi s}{\sqrt{(ct)^2 - s^2}} \, ds \quad .. \quad v\ 0 \text{ o.k.}$$

($n = 2$, $n-1 = 1$)

$$v\ s = ct \quad \sim \frac{1}{\sqrt{(ct)^{\cancel{2}} - s}} \quad \text{ok.} \quad -\tfrac{1}{2} > -1.$$

$$\Rightarrow \quad V_2 \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^3).$$

Pozn: Ze tvaru řešení plyne odhad v L^∞ na $(0,T)\times\mathbb{R}^n$.

Výpočet u_2 v $\mathbb{R}^3$ a nenulový případ:

$$u_2(t,x) = \frac{1}{4\pi t c^2} \int_{\partial U(x,ct)} g_1(\xi)\, dS(\xi) = \left| \frac{\xi - x}{ct} = \zeta \right| = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial U(0,1)} t\, g_1(x + ct\zeta)\, dS(\zeta)$$

$dS(\xi) = (ct)^2 dS(\zeta)$

$$=: t \cdot G(t)$$

$$\Rightarrow \quad u_2(0,x) = 0$$

kde $G(t) = \frac{1}{4\pi}\int_{\partial U(0,1)} g_1(x + ct\zeta)\, dS(\zeta)$

$$\frac{\partial}{\partial t} u_2(t,x) = \underbrace{G'(t)\,t}_{\to 0} + \underbrace{G(t)}_{\to g_1(x)} \xrightarrow{t \to 0+} g_1(x)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u_2(t,x) = \underbrace{G''(t)\,t}_{\substack{\to 0 \\ t \to 0}} + 2G'(t)$$

$$G'(t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial U(0,1)} (\nabla g_1)(x + ct\zeta) \cdot c\zeta \, dS(\zeta) = \frac{1}{4\pi} \int_{\cancel{\partial U(0,1)}} \cancel{\frac{\partial g_1}{\partial \nu}}(x + ct\zeta)\, dS(\zeta) \cdot c$$

$$\cancel{= \frac{1}{4\pi} \int_{U(0,1)} \Delta g_1 (x + ct\zeta)} = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial U(0,1)} \nabla_\zeta [g_1(x + ct\zeta)] \frac{c\zeta}{ct} \, dS(\zeta)$$

normála

$$= \frac{1}{4\pi} \int_{\partial U(x,ct)} \nabla g_1(\xi) \frac{1}{(ct)^2} \cdot c \, \frac{\xi - x}{ct} \, dS(\xi) = \frac{1}{4\pi c t^2} \int_{U(x,ct)} \Delta g_1(\xi)\, d\xi \cdot c \xrightarrow{t \to 0} 0$$

Dále parabolické rovnice:

6. RVT

Def: Cauchyova úloha pro ~~vlnovou~~ rovnici RVT ← Hledání T, ale může být i $+\infty$

$T \in (0,+\infty]$.

Buď $a > 0$, $n \geq 1$, $Q_T = (0,T) \times \mathbb{R}^n$, $f \in C(Q_T)$, $g \in C(\mathbb{R}^n)$ dané.

Řekneme, že $u : \overline{Q_T} \to \mathbb{R}$ řeší Cauchyovu úlohu pro RVT (s pravou stranou f a příp. poč. g) v klasickém smyslu, pokud (a) $u \in C(\overline{Q_T})$,

$\partial_t u,\ \nabla^2 u \in C(Q_T)$

(b) $$\partial_t u(t,x) - a^2 \Delta u(t,x) = f(t,x) \quad \forall\, T \geq t > 0,\ x \in \mathbb{R}^n$$

$$u(0,x) = g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

1) Jednoznačnost řešení – princip maxima

Věta (Slabý princip maxima na omezené množině)

Buď u klasické řešení Cauchyovy úlohy pro $f = 0$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ omezená otevřená. $T > 0$

Označme $\Gamma := (\{0\} \times \Omega) \cup ([0,T] \times \partial\Omega)$.

$Q_T := (0,T) \times \Omega$

$$\max_{\overline{Q_T}} u = \max_{\Gamma} u, \quad \min_{\overline{Q_T}} u = \min_{\Gamma} u$$

Pozn: Není nutné mít řešení na celém $\overline{Q}$, stačí $\overline{Q_T}$.

Dk: Ukážeme pouze pro max. Ať rovnost neplatí: $\max_{\overline{Q_T}} u > \max_{\Gamma} u$

Pokud
$\Rightarrow$ ex. (t_0, x_0) takový, že $t_0 \in (0,T)$ a $x_0 \in \Omega$ a)

nebo $t_0 = T$ a $x_0 \in \Omega$ b), a nabývá max.

$\Delta u(t_0,x_0) \leq 0$, $\partial_t u(t_0,x_0) \geq 0 \Rightarrow \partial_t u(t_0,x_0) - a^2 \Delta u(t_0,x_0) \geq 0$,

pokud by zde platila ostrá nerov. dostali bychom spor.

Definujme $v(t,x) := u(t,x) + \varepsilon |x - x_0|^2$. Pak $\max_{\overline{Q_T}} v > \max_{\Gamma} v$ pro ε dost malé.

a $\partial_t v - a^2 \Delta v = -\varepsilon \cdot 2n < 0$.

Protože ex. bod $(t_1, x_1) \in (0,T] \times \Omega$, kde nabývá v maxima, dostaneme zde platí

$(\partial_t v - a^2 \Delta v)(t_1, x_1) \geq 0$ a dostáváme ↯

~~Věta (Slabý princip max.)~~ Pozn: Pro max. stačí $\partial_t u - a^2 \Delta u \le 0$.

Věta (Slabý princip maxima pro Cauchyovu úlohu):

Buď $u \in C(\overline{Q_T})$ klasické řešení Cauchyovy úlohy pro RVT pro $f=0$, $g \in C(\mathbb{R}^n)$, $T>0$.

Buď g omezená na $\mathbb{R}^n$ a u omezená na $(0,T)\times\mathbb{R}^n =: Q_T$.

Pak $\cancel{\max_{\overline{Q_T}} u = \max_{\mathbb{R}^n} g}$ a $\cancel{\min_{\overline{Q_T}} u = \min_{\mathbb{R}^n} g}$

Dk:
$$\inf_{\mathbb{R}^n} g \le u(t,x) \le \sup_{\mathbb{R}^n} g \qquad \forall (t,x) \in \overline{Q_T}$$

Označme $m = \sup_{\mathbb{R}^n} g$, a pro spor předpokládejme, že ex. $(t_0, x_0) \in (0,T)\times\mathbb{R}^n$ takové, že

$u(t_0,x_0) =: M > m$.

Chceme od u odečíst nějaké fce tak, abychom dostali spor s předchozí větou.

1) $u_1(t,x) := \alpha \in \mathbb{R}$ řeší RVT s $f=0$

2) $u_2(t,x) := (t + a^2\frac{|x-x_0|^2}{2n}$ řeší RVT s $f=0$

Definujme $v(t,x) := u(t,x) - u_1(t,x) - \beta u_2(t,x)$. Pak

$\longrightarrow$ $\partial_t v - a^2 \Delta v = 0$ v Q_T Chceme

$v(t_0,x_0) = M - \alpha - \beta(t_0)$ >0 i)

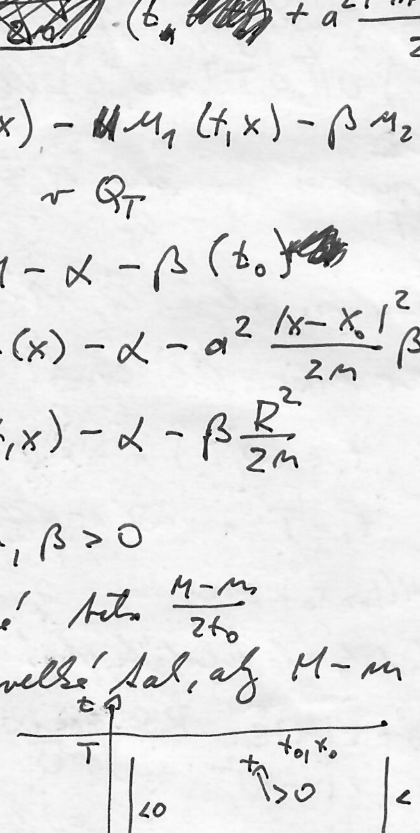
$v(0,x) = g(x) - \alpha - a^2\frac{|x-x_0|^2}{2n}\beta$ <0 ii)

$|x-x_0| = R$: $v(t,x) = u(t,x) - \alpha - \beta\frac{R^2}{2n}$ <0 iii)

ad ii) Přirozená volba $\alpha = m$, $\beta > 0$

ad i) $\beta < \frac{M-m}{t_0}$ pevné třeba $\frac{M-m}{2t_0}$

ad iii) Stačí volit R dost velké tak, aby $M - m - \beta\frac{R^2}{2n} < 0$



↯.

Pozn: Předpoklad omezenosti na g je příliš silný. Stačí předpokládat, že

$$(+) \qquad u(x,t) \le A e^{a|x|^2} \quad \text{pro } t\in[0,T] \text{ a } x\in\mathbb{R}^n \text{ a}$$

jistá $a, A > 0$.

Viz Evans PDE, Sekce 2.3. Funkce k zvážení je $\frac{1}{(\cancel{T}-t+\varepsilon)^{n/2}} e^{\frac{|x-y|^2}{4(T+\varepsilon-t)a^2}}$

pro vhodné ε, y.

Pozn: Důsledek: Řešení Cauchyho úlohy pro RVT je ve třídě ~~funkcí~~ omezených funkcí (funkcí splňující (+)) určené jednoznačně.

Dk: Mějme 2 řešení u_1, u_2: Pak $w := u_1 - u_2$ řeší $\partial_t w - a^2 \Delta w = 0$, $w(0,x) = 0$, $x\in\mathbb{R}^n$ a w je omezené tedy $w \equiv 0$ na $\overline{Q_T}$.

Důsledek: Spojitá závislost na počátku. Buďte g_1, g_2 omezené fce na $\mathbb{R}^n$, $f \equiv 0$, u_1, u_2 omezená řešení Cauchyho úlohy pro RVT s g_1 resp. g_2 a f. Pak platí

$$\sup_{Q_T} |u_1 - u_2| \le \sup_{\mathbb{R}^n} |g_1 - g_2| \quad \text{tj.} \quad \|u_1 - u_2\|_{C(\overline{Q_T})} \le \|g_1 - g_2\|_{C(\mathbb{R}^n)}$$

Energetická metoda

Věta: Buď u klasické řešení Cauchyho úlohy pro RVT s g, f. Nechť navíc ex. $\varepsilon, \alpha > 0$: $|f|^2(x) + |u(x)|^2 + |\partial_t u|^2 + |Du(x)|^2 + |D^2 u|^2(x) \le \frac{\alpha}{|x|^{n+\varepsilon}}$.

Pak

$$\sup_{t\in(0,T)} \|u(t,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \int_0^T |Du(t,x)|^2 \le C\left(\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n} |f|^2 + \cancel{|u|^2} + \int_{\mathbb{R}^n} |g|^2\right)$$

Bez dk. – viz Vlna

Hraniční integrály $\qquad \Delta u \cdot u = \operatorname{div}(u \cdot Du) - \frac{|Du|^2}{2}$

$$\le \int_{\partial U_k} |u||Du| \le k^{n-1-n-\varepsilon} \to 0,\ k \to +\infty.$$

Řešení RVT

$$\partial_t u - a^2 \Delta u = f \quad v\ (0,+\infty)\times \mathbb{R}^n$$

$$u(0,x) = g(x) \quad x\in\mathbb{R}^n$$

Předpokládáme ex. klas. řešení, prodloužíme u a f 0 pro $t<0$ a rovnici přepisujeme v $\mathcal{S}'(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$ na

$$\partial_t u - a^2\Delta u = f + \delta_0 \otimes g \quad v\ \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n+1})$$

Hledáme řešení $\partial_t H - a^2 \Delta H = \delta_{t,x} \quad v\ \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n+1})$

FT v x ... $\hat{H}$: $\partial_t \hat{H} + a^2 |\xi|^2 \hat{H} = \delta_t \otimes \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \quad v\ \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n+1})$

Hledíme řešení

$h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ úloh $\partial_t h + a^2|\xi|^2 h = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n/2}\delta_0 \quad v\ \mathcal{S}'(\mathbb{R})$

Aj. řešení h: $h' + a^2|\xi|^2 h = 0 \quad v\ (0,+\infty)$

$$h(0) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n$$

h prodloužíme 0 pro $t<0$

$$h(t) = e^{-a^2|\xi|^2 t}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \cdot \chi_{(0,+\infty)}(t)$$

$\rightarrow$ $\hat{H}$ je reg. distribuce generovaná $e^{-a^2|\xi|^2 t}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \chi_{(0,+\infty)}(t)$

Fakt: Zpětná FT:

$$\left(e^{-\alpha|\xi|^2}\right)^\vee(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\alpha|\xi|^2 + ix\xi}\, d\xi = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\alpha\left(\xi - \frac{ix}{2\alpha}\right)^2 - \frac{x^2}{4\alpha}}\, d\xi$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{|x|^2}{4\alpha}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-(\sqrt{\alpha}|\xi|)^2}\, d\xi = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{|x|^2}{4\alpha}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\xi|^2}\, d\xi \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{n/2}$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2\alpha}}\right)^n e^{-\frac{|x|^2}{4\alpha}} \quad \text{dosadí } \alpha = a^2 t$$

$$\Rightarrow \quad H(t,x) = \left(\frac{1}{\sqrt{4a^2 t\pi}}\right)^n e^{-\frac{|x|^2}{4a^2 t}} \cdot \chi_{(0,+\infty)}(t)$$ nebo spíše generovaná reg. distribuce.

Def: Fa distribuci $H(t,x) = \left(\frac{1}{\sqrt{4a^2 t\pi}}\right)^n e^{-\frac{|x|^2}{4a^2 t}}$ nazveme fundamentální řešení RVT.

$$H(t,x) := \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}}\right)^n e^{-\frac{|x|^2}{4ta^2}}$$

Věta: $H \in L^1((a,b)\times\mathbb{R})$ $\forall$ interval (a,b)

Navíc $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} H(t,x)\,dx = 1 \quad \forall t>0$

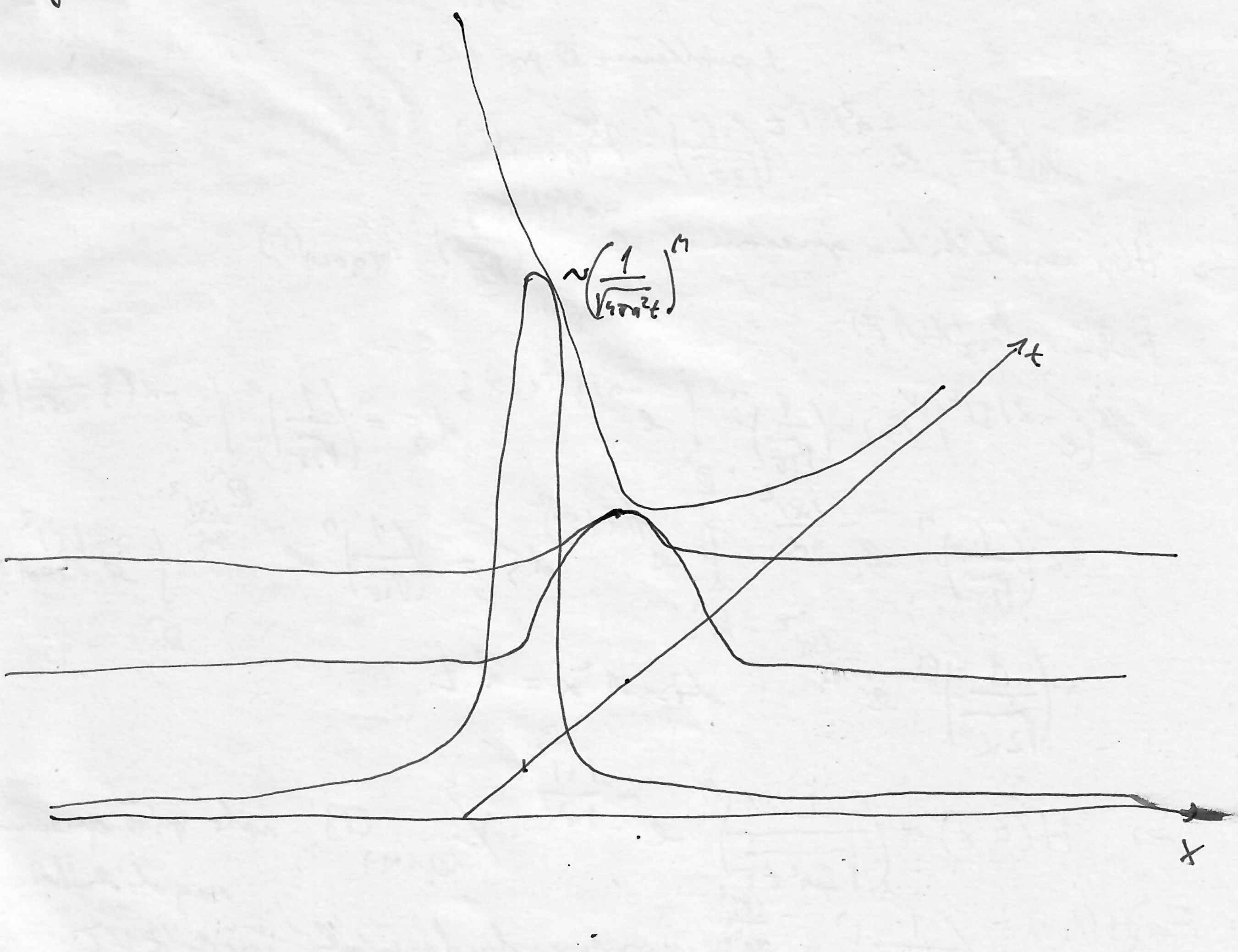
Dk:
$$\int_{\mathbb{R}^n} H(t,x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x|^2}{4ta^2}}\,dx \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}}\right)^n = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-y^2}\,dy\,\frac{\cancel{(\sqrt{2})^n}}{(\sqrt{\pi})^n} = 1.$$

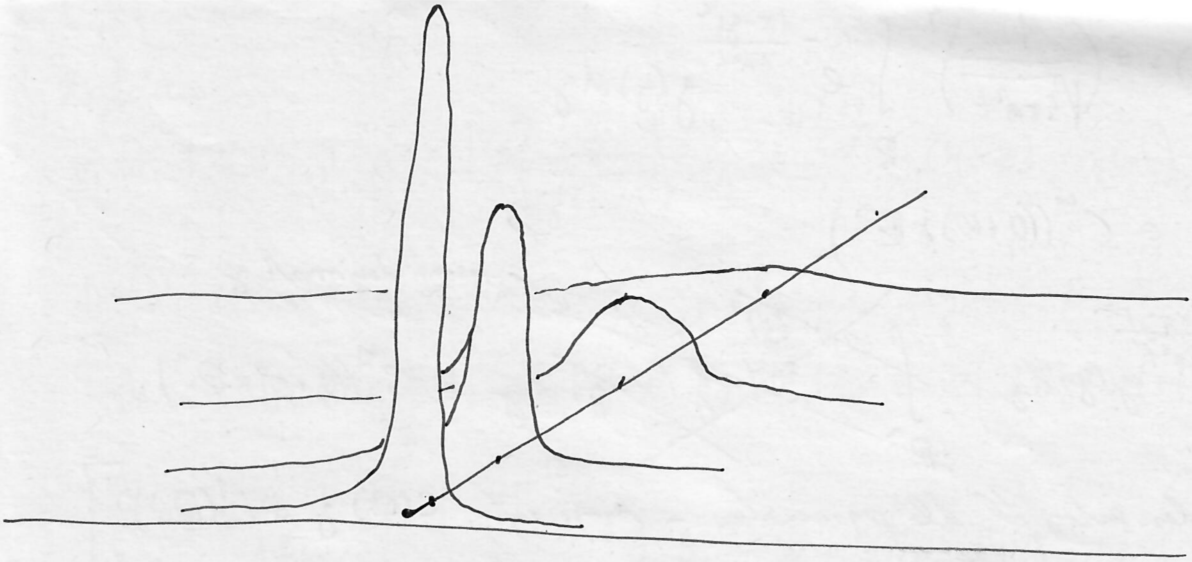
$$-\Big(\underbrace{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}_{=:y}\Big)^2 ; \quad dx = (2a\sqrt{t})^n\,dy$$

Druhá věc je důsledek úpravy a spojitosti.

$\perp$

Graf H





A teď ty konvoluce:

$$(H * f)(t,x) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 s}}\right)^n e^{-\frac{|y|^2}{4a^2 s}} f(t-s, x-y)\,dy\,ds$$

$$= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 (t-s)}}\right)^n e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2(t-s)}} f(s,y)\,dy\,ds$$

$(y \to z)$

$$(H * (\delta_0 \otimes g))(\varphi) = \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{4\pi a^2 s}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{|y|^2}{4a^2 s}} \int_{\mathbb{R}^n} g(x)\, \varphi(s, \overset{z}{\overset{\shortparallel}{x+y}})\,dx\,dy\,ds$$

$$= \int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{4\pi a^2 s}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{|z-x|^2}{4a^2 s}} g(x)\,dx\,\underbrace{\;}_{\varphi(s,z)}\,dz\,ds$$

Konec 19.4.18

Buď I interval.

Def: Řekneme, že $f \in C^{1,2}(I \times \mathbb{R}^n)$, pokud $\partial_t f, D_x^\alpha f \in C(I\times\mathbb{R}^n)$ $\forall \alpha \in (\mathbb{N}_0)^n, |\alpha| \le 2$.

Věta Buď $g \in C(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$ a $f \in C^{1,2}([0,+\infty)\times\mathbb{R}^n)$, $f, \partial_t f, D^2 f \in L^\infty((0,+\infty)\times\mathbb{R}^n)$, $\operatorname{supp} f \subset [0,+\infty)\times\mathbb{R}^n$ je kompaktní.
Řešení Cauchyho úlohy pro RVT má tvar $u = u_1 + u_2$, kde

$$u_1(t,x) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 (t-s)}}\right)^n e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2(t-s)}} f(s,y)\,dy\,ds \quad \text{a}$$

$$u_2(t,x) = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}}\right)^n e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2 t}} g(y)\,dy.$$

u_1 řeší RVT s pravou stranou ~~nulovou~~ f a nulovou poč. podm. $\quad \underset{(s,y)\to(0,x)}{s>0}$

u_2 řeší RVT s nulovou pravou stranou a poč. podm. g. $\quad \forall x \in \mathbb{R}: u_2(s,y) \to g(x)$

Navíc $u_1 \in C^{1,2}([0,+\infty)\times\mathbb{R}^n)$ a $u_2 \in C^\infty((0,+\infty)\times\mathbb{R}^n)$ ~~$\cap\, C([0,+\infty)\times\mathbb{R}^n)$~~

Dk: ad $u_2(t,x) := \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}}\right)^n \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2t}} g(y)\,dy$

a) $\left(\frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}}\right)^n \in C^\infty((0,+\infty)\times\mathbb{R}^n)$

b) $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2t}} g(y)\,dy = \cancel{\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|y|^2}{4a^2t}} g(x-y)\,dy} \in C^\infty((0,+\infty)\times\mathbb{R}^n)$

nechci derivovat g

dle der. integrálu dle parametru – majoranta $C(t,x)\, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$

při: $\partial_{x_j}\left(e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2t}}\right)$ .... stačí ukázat, že všechny derivace $e^{-\frac{|z|^2}{4a^2t}}$

jsou omezené na množině typu $(a,b)\times\mathbb{R}$; $[a,b]\subset(0,+\infty)$.

Indukcí: derivace dle z i t $\left|\frac{P(t,z)}{t^N} e^{-\frac{|z|^2}{4a^2t}}\right| \le \frac{Q(t,z)}{t^N} e^{-\frac{|z|^2}{4a^2t}}$

kde koef. Q jsou kladné, pokud $t\in(a,b)$ $\le C|z|^M e^{-D|z|^2} \le +\infty$

C, D závisí na (a,b), $D>0$.

u_2 řeší rovnici vzhůru – domácí

netriviální poč. podm.:

$|u_2(t,x)-g(x)| \le \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}}\right)^n \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|y|^2}{4a^2t}} |g(x-y)-g(x)|\,dy \le$

$\left(\frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}}\right)^n \left(\int_{U(0,\varepsilon)} e^{-\frac{|y|^2}{4a^2t}} \underbrace{|g(x-y)-g(x)|}_{\text{① udělat malé}}\,dy + \int_{U(0,\varepsilon)^c} e^{-\frac{|y|^2}{4a^2t}} |g(x-y)-g(x)|\,dy\right)$

$\to$ volba ε

② Na $U(0,\varepsilon)^c$ platí $e^{-\frac{|y|^2}{4a^2t}} \le e^{-\frac{\varepsilon^2}{4a^2t}}$

Druhý člen lze odhadnout:

$\le \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}}\right)^n e^{-\frac{\varepsilon^2}{4a^2t}}}_{\substack{\to 0 \\ t\to 0+}} \underbrace{\left(2\int_{\mathbb{R}^n} g(y)\,dy\right)}_{\text{konst}}$

$\Rightarrow$ podm. $t<t_0$

③ $|u_2(t,x)-u_2(t,y)| = \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}}\right)^n \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|z|^2}{4a^2t}} [g(x-z)-g(y-z)]\,dz$ ... nestihli jsme dokončit

Nejdříve:

$$V_1 = |u_2(t,y) - g(x)| \le \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}}\right)^n \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|z|^2}{4a^2t}} \big(g(y-z) - g(x)\big)\,dz \le$$

1) Fix $\varepsilon > 0$. Najdi $\delta > 0$ tak, aby $|g(w) - g(x)| < \varepsilon \quad \forall w \in U_{2\delta}(x)$.

Je-li $y \in U(x,\delta)$, $z \in U(0,\delta)$ pak $|y - z - x| \le |y - x| + |z| < 2\delta$

Tedy
$$V_1 \le \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}}\right)^n \int_{U(0,\delta)} e^{-\frac{|z|^2}{4a^2t}} |g(y-z) - g(x)|\,dz + \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}}\right)^n \int_{U(0,\delta)^c} e^{-\frac{|z|^2}{4a^2t}} \big(|g(y-z)| + |g(x)|\big)\,dz$$

$$= V_{11} + V_{12} + V_{13}$$

$$V_{11} \le \varepsilon, \quad V_{12} \le \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}}\right)^n e^{-\frac{|\delta|^2}{4a^2t}}}_{\xrightarrow{t\to 0} 0} \int_{\mathbb{R}^n} g(z)\,dz \le \varepsilon$$

volba meze pro t: $t \in (0, t_0)$

$$V_{13} \le |g(x)| \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}}\right)^n \int_{U(0,\delta)^c} e^{-\frac{|z|^2}{4a^2t}}\,dz = |g(x)| \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^n \underbrace{\int_{U\left(0, \frac{\delta}{2a\sqrt{t}}\right)^c} e^{-|w|^2}\,dw}_{\xrightarrow[t\to 0]{} 0} < \varepsilon$$

$w := \frac{z}{2a\sqrt{t}}$; $dz = (2a\sqrt{t})^n\,dw$

volba meze pro $t \in (0, t_1)$

$$u_1(t,x) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 s}}\right)^n e^{-\frac{|y|^2}{4a^2s}} f(t-s, x-y)\,dy\,ds = \left|\begin{array}{l} z = \frac{y}{2a\sqrt{s}} \\ dy = (2a\sqrt{s})^n\,dz \end{array}\right. \qquad \perp.$$

$$= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^n e^{-z^2} f(t-s, x - 2za\sqrt{s})\,dz\,ds = \left|\begin{array}{l} s = tr;\ r \in (0,1) \\ ds = t\,dr \end{array}\right.$$

$$= t \cdot \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^n e^{-z^2} f\big(t(1-r), x - 2za\sqrt{tr}\big)\,dz\,dr$$

$-2za\sqrt{r}\,\frac{1}{2\sqrt{t}}$

Poznámka: Pro derivace dle $x \to \partial_x^\alpha u_1$ stačí omezenost $\partial_x^\alpha f$.

Derivace dle t
$$\int_0^1 \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^n e^{-z^2} \Big(f(\ ) + \partial_1 f(\dots)(1-r)t + \nabla_2 f(\dots)\,(-2za\sqrt{r})\,\frac{t}{2\sqrt{t}} \Big)\,dz\,dr$$

Stačí omezenost $|\partial_t f|$ a $|\nabla f|$. Je-li f omezená, zřejmě platí $u_1(0,x) = 0$.

rovnice splněna. $\perp$

Na úpravu DÚ:

Pozn.: • Omezenost uvnitř nutná pro omezenost funkce → stačí pp., že f a její derivace jsou omezené!

• Předpoklad $f \in C^{1,2}(\dots)$ je příliš silný, lze zeslabit na $C^1(~~\mathbb{R}~~ ~~\mathbb{R}~~ [0,+\infty)\times\mathbb{R}^n)$

Dokonce stačí $f \in L^2((0,T)\times\mathbb{R}^n)$, pak ale musíme změnit pojem řešení! → PDR 2.

Prm: Nekonečná rychlost šíření informace RVT.

Je-li $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$; $g \geq 0$; $g \not\equiv 0$, $f \equiv 0$.

$u_2(t,x) > 0 \quad \forall t>0, x \in \mathbb{R}^n$.

Prm: Scaling: Pokud u řeší v $(0,\infty) \times \mathbb{R}^n$ RVT, $\lambda > 0$, $v(t,x) := u(\lambda^2 t, \lambda x)$,

řeší v opět RVT s RHS $= 0$ v $(0,+\infty) \times \mathbb{R}^n$.

Dk: triv $\perp$

Cv: Ukažte, že $\overline{H}(t,x) = \left(\frac{1}{\sqrt{T-t}}\right)^n e^{+\frac{|x-x_0|^2}{4a^2(T-t)}}$ řeší zpětnou RVT na pásu $(0,T) \times \mathbb{R}^n$

$$\partial_t \overline{H} = n\left(\frac{1}{\sqrt{T-t}}\right)^{n-1} \cdot \frac{(+1)}{2(\sqrt{T-t})^3} e^{\frac{|x-x_0|^2}{4a^2(T-t)}} + \left(\frac{1}{\sqrt{T-t}}\right)^n \frac{|x-x_0|^2}{4a^2(T-t)^2} e^{\frac{|x-x_0|^2}{4a^2(T-t)}}$$

$$\partial_{x_i} \overline{H} = \left(\frac{1}{\sqrt{T-t}}\right)^n e^{\frac{|x-x_0|^2}{4a^2(T-t)}} \frac{2(x-x_0)_i}{4a^2(T-t)}$$

$$\partial^2_{x_i} \overline{H} = \left(\frac{1}{\sqrt{T-t}}\right)^n e^{\frac{|x-x_0|^2}{4a^2(T-t)}} \left(\frac{1}{4} \frac{((x-x_0)_i)^2}{a^4(T-t)^2} + \frac{\cancel{4}\,1}{2a^2(T-t)}\right)$$

$$\Delta \overline{H} = \left(\frac{1}{\sqrt{T-t}}\right)^n e^{\frac{|x-x_0|^2}{4a^2(T-t)}} \left(\frac{1}{4} \frac{|x-x_0|^2}{a^4(T-t)^2} + \frac{\cancel{4}\,n}{2a^2(T-t)}\right) \quad \perp$$

Prm: Zobecnění

Konec 24.4.

Numerické metody pro RVT — Doplnění semináře pro 11.6.

Opakování: Lax-Richtmyerova věta: Konzistentní, 1 krokové schéma, pro dobře zadanou PDR je konvergentní, právě když je stabilní.

Von Neumannova analýza: 1 krokové dif. schéma s konst. koef. je stabilní v oblasti stability Λ právě když

$$\exists K > 0, \forall \xi \in \mathbb{R}, k > 0, h > 0 : |g(\xi, k, h)| \le 1 + Kk \quad (*)$$

Je-li g nezávislé na k, h, (*) je ekvivalentní

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, (k, h) \in \Lambda : |g(\xi)| \le 1$$

(tzn., je-li $g\left(\frac{\xi}{h}\right)$ nezávislé na k, h.)

Studovat budeme pouze RVT v $n = 1$, $f \equiv 0$.

1) Je RVT dobře zadaná? Ano: Máme odhad: Je-li $g \in C(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ a $|g|^2 \le \frac{1}{|x|^{1+\varepsilon}}$. Platí

$$\forall t \in (0, T) : \|u(t, \cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \le \|g\|^2_{L^2(\mathbb{R})}.$$

V této třídě řešení je tedy RVT dobře zadaná. ~~Předpoklady~~ Dodatečné předpoklady k $L^2(\mathbb{R})$ je možné zeslabit.

2) Budeme pro různá schémata studovat stabilitu a konzistenci

a) Forward time central space scheme pro rovnici $u_t = b \Delta u$, $b = a^2 > 0$

$$\frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{k} = b \, \frac{v_{m+1}^n - 2 v_m^n + v_{m-1}^n}{h^2} \quad \text{tedy}$$

$$v_m^{n+1} = v_m^n + \frac{bk}{h^2}\left(v_{m+1}^n - 2 v_m^n + v_{m-1}^n\right) =$$

$$= v_m^n (1 - 2 b \mu) + b \mu \left(v_{m+1}^n + v_{m-1}^n\right)$$

s $\mu = \frac{k}{h^2}$

Poznámka:

$$u(t,x+h) - 2u(t,x) + u(t,x-h) =$$

$$h\partial_x u(t,x) + \frac{h^2}{2}\partial_x^2 u(t,x) + \frac{h^3}{6}\partial_x^3 u(t,x) + \mathcal{O}(h^4)$$

$$-h\partial_x u(t,x) + \frac{h^2}{2}\partial_x^2 u(t,x) - \frac{h^3}{6}\partial_x^3 u(t,x) + \mathcal{O}(h^4) =$$

$$h^2\partial_x^2 u(t,x) + \mathcal{O}(h^4)$$

$$\left(\frac{h^4}{12}\partial_x^4 u(t,x) + \frac{h^6}{72}\partial_x^6 u(t,x) + \mathcal{O}(h^8)\right)$$

• 1krokové - explicitní schéma

Konzistence: $v_m^{n+1} \leftarrow v_m^n$

$$u(t+k,x) = u(t,x) + k\,\partial_t u(t,x) + \frac{k^2}{2}\partial_t^2 u(t,x) + O(k^2)$$

$$u(t,x\pm h) = u(t,x) \pm h\,\partial_x u(t,x) + \frac{h^2}{2}\partial_x^2 u(t,x) \pm \frac{h^3}{6}\partial_x^3 u(t,x) + O(h^3)$$

⇒ chyba diskretizace $\varepsilon(t,x) = \partial_t u(t,x) + \frac{k}{2}\partial_t^2 u(t,x) + O(k)$

$$- b\,\partial_x^2 u(t,x) + O(h^2) = O(k) + O(h^2)$$

→ Schéma je konzistentní, 1. řádu v t, 2. řádu v x.

stabilita (von Neumann):

$$g(\xi,k,h) = 1 - 2b\mu + b\mu\left(e^{i\xi h} + e^{-i\xi h}\right)$$
$$= 1 - 2b\mu(1-\cos\xi h) = 1 - 4b\mu\sin^2\left(\frac{\xi h}{2}\right)$$

Schéma je stabilní, pokud $4b\mu \le 2$, tj. $b\mu \le \frac{1}{2}$

Pozn: Přirozená volba oblasti stability je $\Lambda = \{(k,h) \in (0,+\infty);\ \frac{bk}{h^2} = \alpha\}$, $\alpha \in (0,\frac{1}{2}]$

při zjemnění prostorového kroku h na $\frac{1}{2}$ je potřeba zjemnit krok t na $\frac{1}{4}$ ... Rychlý nárůst počtu iterací.

Schéma je disipativní řádu 2 pro $b\mu < 1/2$. Není disipativní pro $b\mu = \frac{1}{2}$.

→ Volíme obvykle $\alpha \in (0,\frac{1}{2})$ blízko $\frac{1}{2}$.

Pozn: K řádu přesnosti: Pokud volíme klasicky Λ, je schéma 2 řádu přesnosti.

Modifikace

b) ~~[illegible]~~ explicitní schéma

$$v_m^{n+1} = e^{-2b\mu} v_m^n + \frac{1}{2}\left(1 - e^{-2b\mu}\right)\left(v_{m+1}^n + v_{m-1}^n\right)$$

explicitní, 1krokové, konzistence:

$$\frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{k} = h^2 \underbrace{\left(\frac{1-e^{-2b\mu}}{2k}\right)}\left(\frac{v_{m+1}^n - 2v_m^n + v_{m-1}^n}{h^2}\right)$$

$$\frac{1-e^{-2b\mu}}{2\mu} \to b \text{ as } \mu \to 0+$$

→ konzistentní pouze pokud $\mu \to 0$ pro $(k,h) \to (0,0)$.

(horší než forward-central scheme)

Stabilita:
$$g(\xi, \xi h) = e^{-2b\mu} - 1 + \left(1 - e^{-2b\mu}\right)\cos(\xi h) + 1$$

$$= \cancel{1 + e^{-2b\mu} 2(1 - \cos(\xi h))}$$

$$= 1 + \left(1 - e^{-2b\mu}\right)\left(\cos(\xi h) - 1\right) =$$

$$= 1 - 2\left(1 - e^{-2b\mu}\right)\sin^2(h\xi)$$

→ nepodmíněně stabilní (lepší než f-c)

Přeskok: Shrinkovanda nedoporučuje.

$\boxed{\text{Prosím pokračujte zde}}$

c) Implicitní schéma (Backward time-central space)

$$\frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{k} = b\,\frac{v_{m+1}^{n+1} - 2v_m^{n+1} + v_{m-1}^{n+1}}{h^2} + \left(f_m^{n+1}\right)$$

Konzistence: řád přesnosti (1, 2) – stejně jako u (F–C)

Stabilita:

$$v_m^{n+1} - b\mu\left(v_{m+1}^{n+1} - 2v_m^{n+1} + v_{m+1}^{n+1}\right) = v_m^n$$

$$g\left(\underbrace{1 - 2b\mu\left(-1 + \cos h\xi\right)}_{+\,4b\mu \sin^2\left(\frac{h\xi}{2}\right)}\right) = 1$$

$$g(\xi, k, h) = \frac{1}{1 + 4b\mu \sin^2\left(\frac{h\xi}{2}\right)}$$ je nepodmíněně stabilní!

. disipativní pro μ odraženo od $0 \leftarrow$ volba Λ.

d) Crank – ~~Nicolson~~ Nicolson

$$\frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{k} = b\left(\frac{1}{2}\,\frac{v_{m+1}^n - 2v_m^n + v_{m-1}^n}{h^2} + \frac{1}{2}\,\frac{v_{m+1}^{n+1} - 2v_{m}^{n+1} + v_{m-1}^{n+1}}{h^2}\right)$$

$$\left(+\,\frac{f_m^n + f_m^{n+1}}{2}\right)$$

. implicitní,

. řád přesnosti: rozvineme v čase $t + \frac{k}{2}$:

odečti $\frac{k^3}{3!\cdot 8}\partial_t^3 u(t+\frac{k}{2}, x)$

$$LS = \left(u(t+\tfrac{k}{2}, x) \pm \frac{k}{2}\partial_t u(t+\tfrac{k}{2}, x) + \frac{k^2}{8}\partial_t^2 u(t+\tfrac{k}{2}, x) \pm \cancel{O(k^3)}\right)\frac{1}{k} =$$

$$= \partial_t u(t+\tfrac{k}{2}, x) + O(k^2)$$

$$PS = \Bigg|\ \text{Platí}\ \frac{g(t+k) + g(t)}{2} = g(t+\tfrac{k}{2}) + O(k^2)$$

$$\frac{g(x+h) - 2g(x) + g(x-h)}{h^2} = O(h^2) + \partial_x^2 u(t, x)\ \Bigg)$$

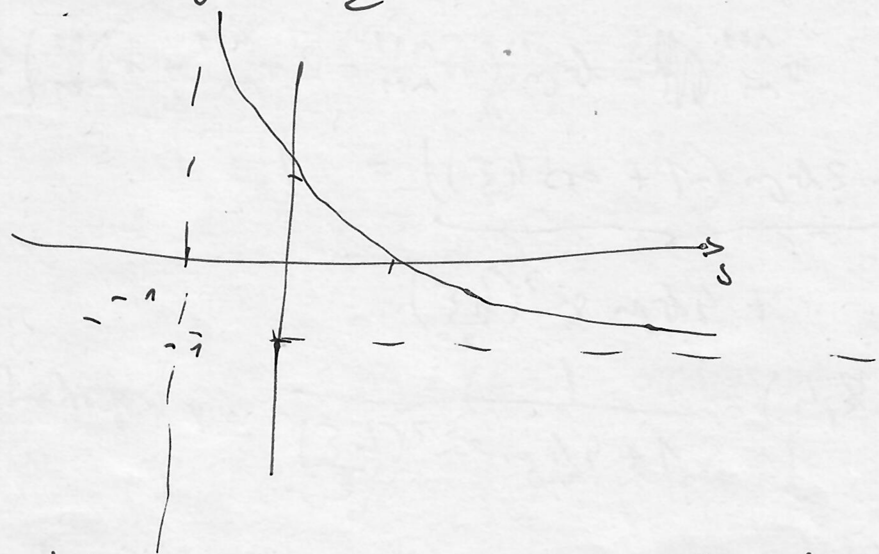
$$= b\,\partial_x^2 u(t+\tfrac{k}{2}, x) + O(h^2) + O(k^2) \Rightarrow \text{Schéma je řádu } (2, 2).$$

Stabilita

$$g\left(1+2b\mu\sin^2\frac{h\xi}{2}\right) = \left(1-2b\mu\sin^2\frac{h\xi}{2}\right)$$

$$g(\xi,\tau,h) = \frac{1-2b\mu\sin^2\frac{h\xi}{2}}{1+2b\mu\sin^2\frac{h\xi}{2}}$$

$$\frac{1-s}{1+s}$$



$s = 2b\mu\sin^2\frac{h\xi}{2}\in(0,+\infty) \Rightarrow g(\xi,\tau,h)\in(-1,1)$

Schéma je nepodmíněně stabilní!

e) ϑ schéma:

$$\frac{v_m^{n+1}-v_m^n}{\tau} = b\left(\vartheta\frac{v_{m+1}^{n+1}-2v_m^{n+1}+v_{m-1}^{n+1}}{h^2}+(1-\vartheta)\frac{v_{m+1}^{n}-2v_m^{n}+v_{m-1}^{n}}{h^2}\right)$$

Pozn: Crank-Nicolson $\Rightarrow \left(\vartheta=\frac{1}{2}\right)$, implicit $\vartheta=1$, expl. $\vartheta=0$.

<u>Konzistence:</u> podobně jako CN:

$$LS = \partial_t u\left(t+\frac{\tau}{2},x\right)+O(\tau^2)$$

$$PS = b\left(\vartheta\left(\partial_x^2 u(t+\tau,x)+O(h^2)\right)+(1-\vartheta)\left(\partial_x^2 u(t,x)+O(h^2)\right)\right)$$

$$= b\,\partial_x^2 u\left(t+\frac{\tau}{2},x\right)+O(\tau)+O(h^2)$$

$\Rightarrow \varepsilon\left(t+\frac{\tau}{2},x\right) = O(\tau)+O(h^2)$ stejné jako explicitní schéma.

Stabilita

$$\mu = \frac{k}{h^2}$$

$$g\left(1 - \frac{bk}{h^2}\vartheta\left(e^{ih\xi} - 2 + e^{-ih\xi}\right)\right) = 1 + (1-\vartheta)\frac{bk}{h^2}\left(e^{ih\xi} - 2 + e^{-ih\xi}\right)$$

$$g(\xi, k, h) = \cancel{1+(1-\vartheta)b\mu}\ \frac{1 - 2(1-\vartheta)b\mu + 2(1-\vartheta)b\mu\cos h\xi}{1 + \underbrace{2\vartheta b\mu - 2\vartheta b\mu\cos h\xi}_{2\cdot 2\vartheta b\mu \sin^2\frac{h\xi}{2}}}$$

$$= \frac{1 - 4(1-\vartheta)b\mu\sin^2 h\xi/2}{1 + 4\vartheta b\mu\sin^2\frac{h\xi}{2}}$$

Jasně $g < 1$.

Když je $g \geq -1$: $1 - 4(1-\vartheta)b\mu\sin^2\frac{h\xi}{2} \geq -1 - 4\vartheta b\mu\sin^2\frac{h\xi}{2}$

$$2 - 4b\mu\sin^2\frac{h\xi}{2}(1-2\vartheta) \geq 0$$

$$4b\mu(1-2\vartheta)\sin^2\frac{h\xi}{2} \leq 2$$

a) $1 \geq \vartheta \geq \frac{1}{2}$ ... Stabilita $\forall \mu$

b) $\vartheta \in [0, \frac{1}{2})$ .... Stabilita pro $\mu \leq \frac{1}{2b(1-2\vartheta)}$

Závěr: • Vhodná volba je $\vartheta = \frac{1}{2}$, ale problém s disipativitou. Ok pro $\frac{k}{h^2} = \text{const}$, ale pokud bychom chtěli delší čas tj. krok $\frac{k}{h} = \text{const}$, disipativita se ztrácí u $\xi = 0$.

• Další možnost: Vol $\frac{k}{h}$ const ($h^2 \geq 6k$) a v každém případě modifikuj ϑ

$\vartheta := \frac{1}{2} - \frac{h^2}{12k}$. Pak bude schéma 2. řádu v t i x.

Ale opět problém s disipativitou

Konec 26.4.

→ Nejlepší volba ϑ závisí na konkrétním problému. Výběr není jasný.

Veta (opak.) (Princíp maxima)

Schéma

i) • $$\sum_{s=-M}^{M} \alpha_s v_{j+s}^{n+1} \overset{(\le)}{\underset{(\ge)}{=}} \sum_{s=-M}^{M} \beta_s v_{j+s}^{n} \qquad \forall j \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

ii) • $$\left.\begin{array}{l} \alpha_0 > 0,\ \alpha_s \le 0,\ s \ne 0 \\ \beta_s \ge 0 \end{array}\right\} s \in \{-M, \dots, M\}$$

iii) • $$\sum_{s=-M}^{M} \alpha_s = \sum_{s=-M}^{M} \beta_s > 0$$

iv) • Ak pre riešenie v ex. $\forall n \in \mathbb{N}_0$ $\max\limits_{m \in \mathbb{Z}} v_m^n$ a $\min\limits_{m \in \mathbb{Z}} v_m^n$

Potom $\forall m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}_0$: $v_{min}^{n} \overset{(\le)}{\le} v_j^{n+1} \overset{(\ge)}{\le} v_{max}^{n}$

$\Rightarrow \quad \forall m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}_0:\ v_{min}^{0} \le v_m^n \le v_{max}^{0}$.

Lemma: ϑ-schéma spĺňa pre $\vartheta \in [0,1]$, $\mu b(1-\vartheta) \le \frac{1}{2}$ predpoklady i), ii), iii) predch. vety.

Dk:

$\alpha_0 = 1 + 2b\mu\vartheta$, $\alpha_1 = -b\mu\vartheta = \alpha_{-1}$

$\beta_0 = 1 - 2(1-\vartheta) b\mu$; $\beta_1 = (1-\vartheta) b\mu = \beta_{-1} > 0$

$\beta_0 \ge 0$ pre $\mu b(1-\vartheta) \le \frac{1}{2}$.

$\perp$.

Věta: Uvažujme pol. $(\tau_i, h_i) \to (0,0)$ pro $i \to +\infty$. Nechť $\mu_i = \frac{\tau_i}{h_i^2}$, $k=1$.

$\mu_i(1-\vartheta) \le \frac{1}{2}$. Ať chyba diskretizace odpovídající ϑ-schématu konverguje k 0 stejnoměrně na $\mathbb{R}\times(0,T]$ pro $i \to +\infty$ a ať při podm. g na lepším místě. Pak aproximace dané ϑ schématem konvergují stejnoměrně v $\mathbb{R}\times[0,T]$ k řešení RVT s poč. podm. g.

Dk: Chyba aproximace $e_j^n = v_j^n - u_j^n$, $u_j^n := u(n\tau, jh)$
Chyba diskretizace $\varepsilon_j^{n+1/2}$. e_j^n řeší — chceme odhadnout tak, abychom normál. řád

$$(1+2\vartheta\mu)\, e_j^{n+1} = \vartheta\mu\left(e_{j-1}^{n+1}+e_{j+1}^{n+1}\right) + (1-\vartheta)\mu\left(e_{j-1}^{n}+e_{j+1}^{n}\right)$$
$$+\left[1-2(1-\vartheta)\mu\right] e_j^n - \tau\, \varepsilon_j^{n+1/2}$$

$\to$ e_j^n řeší ϑ schéma s pravou stranou $\varepsilon_j^{n+1/2}$!

$\to$ Srovnání fce $V_j^n := \alpha t_n$ řeší ϑ schéma s PS α

$\to$ Fce $e_j^n - V_j^n$ splňuje schéma s $\varepsilon_j^{n+1/2} - \alpha \le 0$
pro $\alpha \ge \max|\varepsilon_j^{n+1/2}|$ = volba

$\to$ Princip maxima: $e_j^n - V_j^n \le e_j^0 - V_j^0 = 0$.

Podobně $0 \le e_j^n - V_j^n \Rightarrow$

$$\forall n \in \mathbb{N}_0,\ j\in\mathbb{Z}:\ |e_j^n| \le V_j^n \le T \max_{n,j} |\varepsilon_j^{n+1/2}|$$
$$\longrightarrow 0 \quad i \to +\infty.$$

$\perp$

Pozn.: • Stačí př., že chyba v poč. podm. konv. k 0 na $\mathbb{R}$ pro $i \to +\infty$.

• Věta bez podmínky na ohraničenost g.

• Pro takové g je splněn předpoklad věty – stačí $g \in C^6(\mathbb{R})$ a spol. omezená.

$$u(t,x) = \left(\frac{1}{4\pi t}\right)^{1/2} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{|y|^2}{4t}}\, g(x-y)\, dy$$

$\Rightarrow$ přenesení derivací. $\perp$

~~Následující eliptické řešiče~~

~~7. Laplaceova a Poissonova rovnice~~

Bude-li čas: Thomasův algoritmus: [Shi, Sekce 3.5]

Řeším soustavu: $a_i w_{i-1} + b_i w_i + c_i w_{i+1} = d_i \quad i = 1, \dots, m-1 \quad (*_i)$

$$w_0 = \beta_0, \quad w_m = \beta_m$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ a_1 & b_1 & c_1 & & \\ & a_2 & b_2 & c_2 & \\ & & & \ddots & \\ & & a_{m-1} & b_{m-1} & c_{m-1} \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \\ \vdots \\ w_{m-1} \\ w_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ d_1 \\ \vdots \\ d_{m-1} \\ \beta_m \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & & \\ a & b & c & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a & b & c \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ d_1 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & & \\ 0 & b_1 & c_1 & & \\ 0 & 0 & b_2 - \frac{a_2}{b_1} c_1, & c_2 & \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \beta_0 \\ d_1 - a_1\beta_0 \\ d_2 - (d_1 - a_1\beta_0)\frac{a_2}{b_1} \end{matrix}$$

Krok 1: $i = 1$: Přičti k $(*)_1$ $\quad -a_1 w_0 = -a_1\beta_0$

$\Rightarrow \quad b_1 w_1 = d_1 - a_1\beta_0 - c_1 w_2 \Rightarrow$

$$w_1 = \frac{d_1 - a_1\beta_0}{b_1} - \frac{c_1 w_2}{b_1} = p_2 w_2 + q_2,$$

pokud zvolíme $p_2 = -\frac{c_1}{b_1}, \; q_2 = \frac{d_1 - a_1\beta_0}{b_1}$

Indukce: máme-li pro $i \in \{2, \dots, m-1\}$ vztah

$$w_i = p_{i+1} w_{i+1} + q_{i+1}$$

7. Eliptické rovnice – Laplaceova & Poissonova

Def: Buď $f \in C(\mathbb{R}^n)$. Řekneme, že ~~$u \in C^2(\mathbb{R}^n)$~~; $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je klasické řešení Poissonovy rovnice pokud

a) $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$

b) $-\Delta u = f$ v $\mathbb{R}^n$

Je-li $f = 0$ nazýváme u harmonickou fcí na $\mathbb{R}^n$. (Podobně na $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ot.) Ozn. $u \in \mathcal{H}(\Omega)$.

Věta: (Slabý princip maxima na omezené množině) Buď u klasické řešení Laplaceovy úlohy ~~Cauchyovy úlohy~~ pro $f = 0$, Ω ot. omezená $\subset \mathbb{R}^n$. Pak platí

$$\min_{\partial\Omega} u \le \min_{\Omega} u \le \max_{\Omega} u \le \max_{\partial\Omega} u$$

Dk: Viz dk pro RVT $\perp$.

Věta: Buď u klasické řešení Laplaceovy úlohy pro $f = 0$, u omezená! Pak u je konstantní!

Dk: Neumím elementárně, bude později. Věta se nazývá Liouvilleova! $\perp$.

Odvození fund. řešení pomocí zpětného RVT, $a = 1$.

$$H_n(x,t) = \left(\frac{1}{4\pi t}\right)^{n/2} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \chi_{(0,+\infty)}(t)$$

Integrujeme přes t: $\displaystyle\int_0^{+\infty} H_n(x,t)\,dt = \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{4\pi t}\right)^{n/2} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}\,dt = \left| \begin{array}{l} s = \frac{1}{t} \\ dt = -\frac{1}{s^2}\,ds \end{array} \right| =$

$$= +\int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{4\pi}\right)^{n/2} s^{n/2-2} e^{-\frac{|x|^2}{4}s}\,ds = \left| \begin{array}{l} \frac{|x|^2}{4} s = \tau \\ ds = \frac{4}{|x|^2}\,d\tau \end{array} \right| = \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{4\pi}\right)^{n/2} \tau^{n/2-2} e^{-\tau} \cdot$$

$$\left(\frac{|x|^2}{4}\right)^{-\frac{n}{2}+2} \cdot \frac{4}{|x|^2}\,d\tau = \Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right) \cdot \left(\frac{1}{\pi}\right)^{n/2} \frac{1}{4} |x|^{2-n} =$$

označme $\alpha(n) = \dfrac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)}$ objem koule, $n\alpha(n)$ povrch koule v $\mathbb{R}^n$

$$\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}{\left(\frac{n}{2}-1\right)\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \left(\frac{1}{\pi}\right)^{n/2} \cdot \frac{1}{4} |x|^{2-n} = \frac{1}{(n-2)(n)} \frac{1}{\alpha(n)} \cdot |x|^{2-n}$$

$n = 2$ není integr. v 0
→ jiný postup pomocí distribucí
– bez dk.

Definice: Funkci $\phi(x) := \begin{cases} \frac{1}{(n-2)n\alpha(n)}|x|^{2-n} & n>2 \\ -\frac{\log|x|}{2\pi} & n=2 \end{cases}$

, kde $\alpha(n) := \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$, nazveme fundamentální řešení Laplaceovy rovnice.

Pz: $\Delta\phi = 0$ na $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$, další harm. fce: $1, x_i, \sum_{i=1}^n a_i x_i^2$, kde $\sum_{i=1}^n a_i = 0$

Věta: (řešení Poissonovy rovnice) (Evans, Thm 1, Sekce 2.2)

Buď $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$. Pak fce $u := \phi * f$ ~~splňuje~~ je klasické řešení Poissonovy rovnice.

Dk: Pouze reg.

$$\Phi * f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(y)\cdot f(x-y)\,dy$$ a protože $\phi \in L^1_{loc}$ je vše jasné. $\perp$

Typicky řeší např. z konečnědimenzionální, nebo z následující věty

<u>Věta o 3 potenciálech</u>: Buď $u \in C^2(\bar\Omega)$, Ω s omezenou hranicí pro Greenovy věty. Pak platí pro $x\in\Omega$,

$$u(x) = \int_\Omega -\Delta u\,\phi_x + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}\phi_x - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \phi_x}{\partial n} u,$$ kde $\phi_x(y) = \phi(y-x)\ \forall y \in \bar\Omega\setminus\{x\}$

$\Omega_\rho := \Omega \setminus \overline{U(x,\rho)}$ pro ρ dostatečně malé!

Dk: Na Ω_ρ lze integrovat per partes: $\phi_x(y) := \phi(y-x)$

$$\int_\Omega \Delta u\,\phi_x = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}\phi_x - \int_\Omega \nabla u \nabla \phi_x$$

$$\int_\Omega u\,\Delta \phi_x = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial \phi_x}{\partial n} - \int_\Omega \nabla u \nabla \phi_x$$

Odečtěme
$$\int_{\Omega_\rho} \Delta u\,\phi_x - \underbrace{u\,\Delta\phi_x}_{=0} = \int_{\partial\Omega_\rho} \frac{\partial u}{\partial n}\phi_x - u\frac{\partial \phi_x}{\partial n}\,dS$$

$\to \int_\Omega \Delta u\,\phi_x$ Doma.

$\partial\Omega_\varrho = \partial\Omega \cup \partial U(x,\varrho)$

$\uparrow$ původní orientace $\qquad \uparrow$ opačná orientace

Protože $\left|\int_{\partial U(x,\varrho)} \frac{\partial v}{\partial n}\phi_x\right| \le \max_{\partial U(x,\varrho)} |\nabla v| \cdot c \cdot \varrho^{2-n} \cdot \varrho^{n-1} \longrightarrow 0 \quad \varrho \to 0$

$$\int_{\partial U(x,\varrho)} v \frac{\partial \phi_x}{\partial n}\, dS = \left| \begin{array}{l} n = \frac{y-x}{|y-x|} \\ \text{a} \\ \nabla\phi_x(y) = \frac{1(2-n)}{(n-2)n\alpha(n)} |y-x|^{1-n} \frac{y-x}{|y-x|} \end{array} \right|$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = -\frac{1}{n\alpha(n)} \underbrace{|y-x|}_{\varrho}^{1-n}$$

Potenciály:
- objemový
- jednoduchá vrstva
- dvojvrstva

$$= -\fint_{\partial U(x,\varrho)} v(y)\, dS(y) \longrightarrow -v(x), \ \varrho \to 0$$

$$\Rightarrow v(x) = \int_\Omega -\Delta v\, \phi_x + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial n}\phi_x - v \frac{\partial \phi_x}{\partial n}\, dS$$

$\perp$

Pro důkaz předchozí věty vol $u = f$, $\Omega =$ [redacted] $U(0,R) \supset \operatorname{spt} f$.

Věta o průměru: Buď u harmonická na $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, ot., $\overline{U(x_0,R)} \subset \Omega$; ozn. U. Pak

$$u(x_0) = \frac{1}{|U|}\int_U u = \frac{1}{\mathcal{H}^{n-1}(\partial U)} \int_{\partial U} u = \fint_U u = \fint_{\partial U} u$$

Dk: Použijeme minulou větu o 3. pot. ($n \ge 3$): objemový int. nulový, $\phi_{x_0}(y) = R^{2-n} \frac{1}{(n-2)n\alpha(n)}$,

$$(\nabla\phi_{x_0})(y) = \frac{-1}{n\alpha(n)} \frac{(x_0-y)}{|x_0-y|^n} \ ; \ \left(\frac{\partial \phi_{x_0}}{\partial n}\right)(y) = -\frac{1}{n\alpha(n)} \frac{1}{R^{n-1}} \quad \text{tedy}$$

$$2.\text{ int} \underset{\text{per partes}}{=} \int_\Omega \Delta v \cdot R^{2-n} \frac{1}{(n-2)n\alpha(n)} = 0 \ ; \ 3.\text{ int} = \fint_{\partial U} u.$$

Krácení: $$\fint_U u = \int_0^R \frac{1}{\alpha(n)R^n} \int_{\partial U(x_0,\varrho)} u\, dS\, d\varrho = \int_0^R \frac{n\cancel{\alpha(n)}\varrho^{n-1}}{\cancel{\alpha(n)}R^n} u(x_0)\, d\varrho = n\left[\frac{\varrho^n}{nR^n}\right]_0^R u(x_0)$$

$$= u(x_0).$$

$\perp$

Vylepšení předchozí věty: zvolíme jádro ať je $\xi \in \mathcal{D}(U)$, nezáporné, radiálně symetrické, se středem v x_0

a $\int_U \xi = 1$

Pak $u(x_0) = \int_U u\xi$.

ξ má tvar $\xi(y) = \tilde\xi(|y-x_0|)$. Potom

$$\int_U u\xi = \int_U u(y)\tilde\xi(|y-x_0|) = \int_0^R \frac{1}{\alpha(n)R^n} \int_{\partial U(x_0,\rho)} u(y)\,\tilde\xi(|y-x_0|)\,dS(y)\,d\rho =$$

$$= \int_0^R \frac{1}{\alpha(n)R^n}\tilde\xi(|\rho|)\, n\alpha(n)\,\rho^{n-1}\,d\rho\; u(x_0) =$$

$$u(x_0)\int_0^R \frac{1}{\alpha(n)R^n} \int_{\partial U(x_0,\rho)} \tilde\xi(|y-x_0|)\,dS(y)\,d\rho = \int_U \xi\, u(x_0) = u(x_0) \qquad \perp$$

Důsledek: Je-li u harmonická v $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ot., je $u \in C^\infty(\Omega)$.

Pro x blízko x_0 je $u(x) = (u * \xi)(x)$. $\perp$

Pozn: Jde to jednodušeji přímo z věty o 3 pot. - derivace!

Pozn: Platí obrácená věta o průměru: Je-li $u \in C(\Omega)$ a splňuje podmínku průměru, pak $u \in C^\infty(\Omega)$ a je harmonická!

Návod: podm. průměru $\Rightarrow$ podm. průměru s $\xi \Rightarrow C^\infty$, dostat to věty o 3 pot. podobně jako ve větě o průměru. $\perp$.

Pozn: Předchozí pozn. dává možnost definovat harmonické fce bez derivací!

Poisson

Věta: (silný princip maxima): Buď u harmonická v Ω $(u \in \mathcal{H}(\Omega))$, Ω souvislá. $u \in C(\overline{\Omega})$.

Ex.-li $x_0 \in \Omega$, $u(x_0) = \max_{\overline{\Omega}} u$, je u konstantní

$$u = \max_{\partial\Omega} u.$$

Konec 10.5.

Dk: Def $M := \{x \in \Omega;\ u(x) = u(x_0)\}$ je uzavřená a neprázdná!

Je-li $y \in M$, platí z věty o ~~3. pol. pro okolí malou koulí $U = U(y,R)$~~ průměru

$$0 = ⨍_U u(x) - u(y)\, dx,\quad \text{protože je } u(x) - u(y) \leq 0 \text{ na } U,$$

musí platit $u(x) - u(y) = 0$ na U. Tedy M je otevřená!

Protože je Ω souvislá, je $M = \Omega$. $\perp$

Důkaz Liouvilleovy věty:

$i \in \{1, \dots, n\}$: $\partial_i u$ je harmonická a tedy $\left|\partial_i u(x)\right| = \left| ⨍_{U(x,R)} \partial_i u \right| = \left| \frac{1}{\alpha(n) R^n} \int_{\partial U(x,R)} u\, n_i \right|$
$x \in \mathbb{R}^n$

$$\leq \frac{n}{R} \|u\|_{L^\infty(\partial U(x,R))} \longrightarrow 0 \qquad R \to +\infty.$$

Tedy $\nabla u = 0$ na $\mathbb{R}^n$. Tedy u je konstantní! $\perp$

Harnackova věta: Buď $u \in \mathcal{H}(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ot., $V \subset \mathbb{R}^n$ ot., souvislá, $V \subset \overline{V} \subset \Omega$. u nezáporná! Pak ex. $c > 0$ tak, že

$$\sup_V u \leq c \inf_V u.$$

Dk: Ať $x, y \in V$, $R \geq |x - y|$, $U(x,R), U(y,2R) \subset \Omega$.

Pak $u(x) = ⨍_{U(x,R)} u \leq 2^n ⨍_{U(y,2R)} u = u(y)$.

Označme $\varrho := \operatorname{dist}(\overline{V}, \partial\Omega)$. Uvažujme nejprve případ ~~…~~ $2R < \varrho$.

1. Harnackova věta: Ω omezená, $u_n \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, $\Delta u_n = 0$, $u_n = g_n$ na $\partial\Omega$.

Nechť $g_n \rightrightarrows g$ na $\partial\Omega$. Potom $\exists u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, $\Delta u = 0$ v Ω, $u = g$ $\partial\Omega$

$u_n \rightrightarrows u$ na $\overline{\Omega}$; $u_n, u \in C^\infty(\Omega)$, $D^\alpha u_n \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} D^\alpha u$ v Ω.

Dk: Slabý princip maxima dá $u_n \rightrightarrows u$ v $\overline{\Omega}$ a u splňuje podm. ϕ a je spojitá na $\overline{\Omega}$. Tedy $u \in \mathcal{H}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, stejně $u = g$ na $\partial\Omega$, $u \in C^\infty(\Omega)$.

Je-li η sférický zhlazující kernel s $\int \eta = 1$ a malým nosičem. je

$$u_n = u_n * \eta, \quad u = u * \eta \quad \text{a tedy} \quad D^\alpha u_n = u_n * D^\alpha \eta \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} u * D^\alpha \eta = D^\alpha u$$

$\perp$

2. Harnackova: Ω oblast $u_n \in \mathcal{H}(\Omega)$, ~~[illegible]~~, $\exists x_0 \in \Omega$; $u_n(x_0) \to u(x_0)$

a u_n je monotónní posl. fcí. Potom $u_n \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} u$ v Ω a $\Delta u = 0$ v Ω

$u \in C^\infty(\Omega)$

Dk. bez. ~~úú~~ u_n klesající Plyne z Harnackovy nerovnosti. Fixuji $V \subset \overline{V} \subset \Omega$ a najdi C z H Věty

Pak pro $n < m$ platí $0 \le \sup_V (u_m - u_n) \le C \inf_V (u_m - u_n)$ ~~$\to 0$~~

$\le C\,(u_m(x_0) - u_n(x_0)) \longrightarrow 0$

$m,n \to \infty$

+ podm. princip a stejnoměrnost spojitosti

3. Harnackova: Ω oblast, $u_n \in \mathcal{H}(\Omega)$, $\exists M > 0, \forall x \in \Omega, n \in \mathbb{N}: |u_n(x)| \le M$.

Potom $u_{n_k} \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} u$ v Ω a $u \in \mathcal{H}(\Omega)$.

Dk: AA: stejná omezenost ✓

stejná st. spojitost se stejné omezenosti gradientu

$\perp$

Dirichletova úloha pro Laplaceovu rovnici

Df: Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ neprázdná otevřená, $\varphi \in C(\partial\Omega)$, $f \in C(\Omega)$.

Řekneme, že u řeší na Ω Dirichletovu úlohu pro Laplaceovu-Poissonovu rovnici s daty φ, f v klasickém smyslu, pokud

$$\cdot\; u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$$
$$\Delta u = f \quad v\ \Omega$$
$$u = g \quad \partial\Omega$$

Pozn: Řešení Dirichletovy úlohy na omezené množině je nejvýše jednoznačné. Plyne z (varianty) slabého principu maxima.

Pozn: na neomezené množině řešení jednoznačné není!

Př: $\Omega = (0, +\infty)$; $g = 0$ v 0 řeší $\alpha x = u(x)$

Hledání explicitního řešení. Předp., že řešení je $u \in C^2(\overline{\Omega})$. Ve 3. pot. dává

$$u(x) = \int_\Omega -f\phi_x + \underbrace{\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}\phi_x \, dS}_{?} - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \phi_x}{\partial n} g \, dS$$

? Najdi ψ_x tak, že: $\psi_x = \phi_x$ na $\partial\Omega$

$$\Delta\psi_x = 0 \quad v\ \Omega$$
$$\psi_x \in \mathcal{H}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$$

Pak
$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}\phi_x = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}\psi_x = \int_\Omega \Delta u\, \psi_x - \underbrace{\int_\Omega u \Delta\psi_x}_{=0} + \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial \psi_x}{\partial n}$$

Tedy: $u(x) = \int_\Omega f(\psi_x - \phi_x) + \int_{\partial\Omega} g \frac{\partial}{\partial n}(\psi_x - \phi_x)$ nebo označíme-li
$G(x,y) = \psi_x(y) - \phi_x(y)$

$$u(x) = \int_\Omega f(y) G(x,y)\, dy + \int_{\partial\Omega} g \frac{\partial}{\partial n(y)} G(x,y)\, dS(y)$$

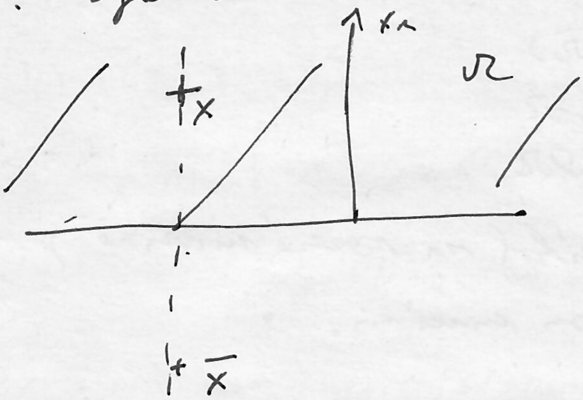
Fce G se nazývá Greenova fce – obdoba fund. řešení.

Podaří-li se $n = 1$ dokážeme:

$$1 = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G}{\partial n(y)}(x,y)\, dS(y)$$

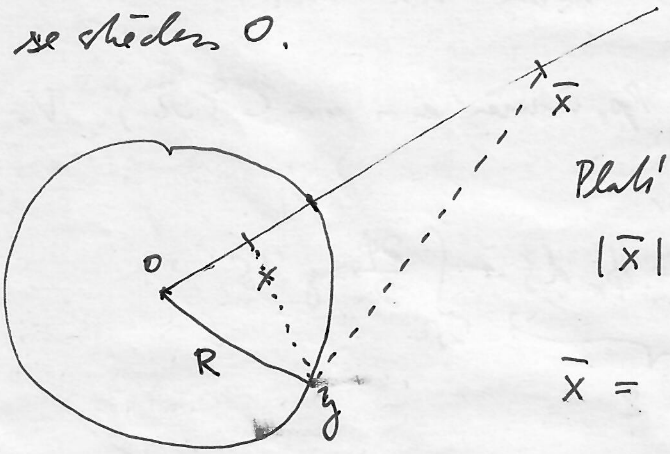
Jak hledat ψ_x? Symetrie – zrcadlení!

a) Poloprostor:



$\psi_x = \phi_{\bar{x}}$ Dopočtete!

b) Koule se středem 0.



Sférická inverze

Platí: $|x|\,|\bar{x}| = R^2$

$$|\bar{x}| = \frac{R^2}{|x|}$$

$$\bar{x} = R^2 \frac{x}{|x|}$$

Přičemž $\underbrace{\phi_{\bar{x}}(y)}_{(n-2)(n)\alpha(n)} = (n-2)n\alpha(n)\,\phi_{\bar{x}}(y) = |y-\bar{x}|^{2-n} =$

$$= \left|y - \frac{R^2}{|x|}x\right|^{2-n} = \left(\frac{R}{|x|}\cdot|y-x|\right)^{2-n}$$

Protože: $\frac{R}{|x|} = \frac{|\bar{x}|}{R} \checkmark = \frac{|y-\bar{x}|}{|y-x|}$ $\quad = \left(\frac{R}{|x|}\right)^{2-n}(n-2)n\alpha(n)\,\phi_x(y)$

$$\phi_{\bar{x}}(y) = \left(\frac{R}{|x|}\right)^{2-n}\phi_x(y) \quad \text{na } y \in \partial\Omega.$$

Proto volíme $\psi_x(y) = \left(\frac{|x|}{R}\right)^{2-n}\phi_{\bar{x}}(y) = \frac{1}{(n-2)n\alpha(n)}\left(\frac{|x|}{R}\right)^{2-n}\left(y - \frac{R^2}{|x|}x\right)^{2-n}$

Spočtete: $\frac{\partial}{\partial n(y)}\left(\psi_x(y) - \phi_x(y)\right) := \frac{1}{R}\,\frac{R^2 - |x|^2}{|x-y|^n}.$

Pro kouli o jiném středu než 0:

Věta: Buď $n \geq 2$, ~~pro~~ $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $R > 0$, $g \in C(\partial U(x_0,R))$.

Definujme: $u(x) := \begin{cases} g(x) & x \in \partial U(x_0,R) \\ \frac{1}{n\alpha(n)} \frac{1}{R} \int_{\partial U(x_0,R)} g(y) \frac{R^2 - |x-x_0|^2}{|x-y|^n} dS(y) \end{cases}$

Potom
- $u \in C^\infty(U(x_0,R)) \cap C(\overline{U(x_0,R)})$
- $\Delta u = 0$ v $U(x_0,R)$
- $\|u\|_{C(\overline{U})} \leq \|g\|_{C(\partial U)}$
- je-li $g \geq 0$ na ∂U je i $u \geq 0$ na U.

$\leq$ $\leq$

Pozn: Poissonův integrál, Poissonovo jádro

Dk:
- $u \in C^\infty(U(x_0,R))$ jasné, der. int. dle par.
- $\Delta u = 0$ v $U(x_0,R)$ je taky jasné, protože $\Delta_x\left(\frac{R^2 - |x-x_0|^2}{|x-y|^n}\right) = 0$, ověř!
- monotonie je lin.
- Zbývá nabývání okr. podm.:

~~Bez~~ Pp. $x_0 = 0$. Fix $\tilde{x} \in \partial U(0,R)$. Víme, že

$\forall x \in U(0,R)$ platí: $1 = \frac{1}{n\alpha(n)} \frac{1}{R} \int_{\partial U(0,R)} \frac{R^2 - |x|^2}{|x-y|^n} dS(y)$, viz dříve.

Tedy $|u(x) - u(\tilde{x})| \leq \frac{1}{n\alpha(n)} \frac{1}{R} \int_{\partial U(0,R)} |g(\tilde{x}) - g(y)| \frac{R^2 - |x|^2}{|x-y|^n} dS(y)$

~~Ze spoj.~~ Fix $\varepsilon > 0$, ze spoj. g ex. $\delta > 0$: $\forall y \in U(\tilde{x},\delta)$: $|g(\tilde{x}) - g(y)| < \varepsilon$.

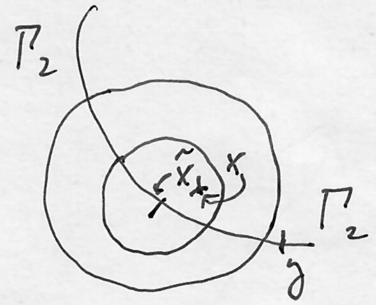
Označ. $\Gamma_1 = \partial U(0,R) \cap U(\tilde{x},\delta)$, $\Gamma_2 = \partial U(0,R) \setminus \Gamma_1$. Pak

$\int_{\Gamma_1} dS(y) \leq \varepsilon \frac{1}{n\alpha(n)} \frac{1}{R} \int_{\partial U(0,R)} \frac{R^2 - |x|^2}{|x-y|^n} dS(y) = \varepsilon$

$$\int_{\Gamma_2} dS(y) = \frac{1}{n\alpha(n)}\,\frac{1}{R}\int_{\Gamma_2} \frac{R^2-|x|^2}{|x-y|^n}\,|g(y)-g(\tilde{x})|\,dS(y)$$

$$\le \frac{1}{n\alpha(n)}\,\frac{1}{R}\,\sup_{\partial U(0,R)}\big(|g(y)|+|g(\tilde{x})|\big)\cdot\int_{\Gamma_2}\frac{R^2-|x|^2}{|x-y|^n}\,dS(y) = *$$

Pro $x \in U(0,R)\cap U(\tilde{x},\delta/2)$ platí $|x-y| \geq \delta/2$



$$* \le \frac{1}{n\alpha(n)}\,\frac{1}{R}\,\sup(\;)\left(\frac{2}{\delta}\right)^n |\partial U(0,R)|\cdot(R^2-|x|^2)$$

$\le \varepsilon$ pro $x \in U(\tilde{x},\xi) \subset U(\tilde{x},\frac{\delta}{2})$.

↑

Volba ξ

$\perp$.

Řešení úlohy pro obecnou množinu Ω ot.

→ Perron - Wiener - Brelot

Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ot., $g \in C(\partial\Omega)$.

Definice: Fce $v \in C(\bar{\Omega})$ se nazývá subřešení problému $-\Delta u = 0$ v $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ot, $u = g$ na $\partial\Omega$, pokud $v \le g$ na $\partial\Omega$ a

$\forall U$ koule $\subset \Omega$ a $w \in \mathcal{H}(U)$: $w \geq v$ na $\partial U \Rightarrow v \le w$ na U.

Pozn: Stačí pp. $-\Delta v \le 0$.

Řešení / Kandidát se hledá ve tvaru

$$u = \sup_{v \in S_g} v \quad ; \text{ kde } S_g \text{ je množina všech subřešení.}$$

S_g je neprázdná :: $\min_{\partial\Omega} g$ v ní leží!

Každá fce v ní je omezená konst. $\max_{\partial\Omega} g$.