2. zápočtová písemka, numma101, 2018-19 - řešení

1) $$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin\left(3\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{n}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)} = \lim_{n\to+\infty} \underbrace{\frac{\sin\left(3\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{n}\right)}{3\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{n}}}_{\mathrm{I}\ \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1} \cdot \underbrace{\frac{3\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}}_{\mathrm{II}\ \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1} \cdot \underbrace{\frac{\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{n}}}_{\mathrm{III}\ \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1} \cdot \frac{1}{\pi}$$

$$= \frac{3}{\pi}$$

ad I : Víme $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, $3\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{n} \xrightarrow{n\to+\infty} 0$ a $\forall n\in\mathbb{N}: 3\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{n} \neq 0$.

Heineho věta dává výsledek.

II : $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\cos x}\cdot\frac{1}{x} = 1$; $\frac{1}{n} \xrightarrow{n\to+\infty} 0$ a $\forall n\in\mathbb{N}: \frac{1}{n}\neq 0$ + Heine

III : podobně

2) $$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} (2\sin x)^{\mathrm{tg}(3x)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \exp\left(\mathrm{tg}\,3x\,\lg(2\sin x)\right) =: L$$

Spočtěme: $\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \mathrm{tg}\,3x\,\lg(2\sin x) =$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{\overset{\to 1}{\sin 3x}}{\cos 3x} \cdot \frac{\lg(2\sin x)}{2\sin x - 1} \cdot (2\sin x - 1) =$$

- $\frac{\lg y}{y-1} \xrightarrow{y\to 1} 1$
- $2\sin x \to 1$
- $2\sin x \neq 1$ pro $x\in(0,\frac{\pi}{2})\setminus\{\frac{\pi}{6}\}$

$$\stackrel{AL}{=} \lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{2\sin x - 1}{\cos 3x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{2\sin\left(x - \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\right) - 1}{\cos\left(3x - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\frac{1}{2} - 1}{-\sin 3\left(x-\frac{\pi}{6}\right)} \overset{*}{=}$$

$$\lim_{y\to 0} \left(\underbrace{\frac{\sqrt{3}\sin y}{y}}_{\to\sqrt{3}} + \underbrace{\frac{\cos y - 1}{y^2}\cdot y}_{\to 0}\right)\cdot \underbrace{\frac{3y}{-\sin 3y}}_{\to -1}\cdot\frac{1}{3}$$

$$\overset{AL}{=} -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

ad $*$: Věta o limitě složené fce: vnitřní fce $x-\frac{\pi}{6}$ je různá od 0 na okolí $P(\frac{\pi}{6})$

Konečně, jelikož je exp spojitá v $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ je $L = \exp\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Ad 3)

3) $$\frac{\left|\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)\right|}{\frac{1}{n^2}} \le \frac{1-\cos\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} \xrightarrow{n\to+\infty} \frac{1}{2}$$

Tedy ~~konverguje~~ podle limitního srovnávacího kritéria i řada $\sum_{n=1}^{+\infty}\left[1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right]$.

Podle nelimitního srovnávacího kritéria konverguje i řada

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left|\sin\frac{n\pi}{2}\right|\left|1-\cos\frac{1}{n}\right|$$ a tedy původní řada konverguje absolutně.