7. 12.

Částečná regularita pomocí A-harmonické aproximace

Strategie: • najít A-harmonickou při blízko řešení u (pro ni platí užitečné lemma)

• přenést regularitu h na u

Komentář k L 4.27:

1) Pole $\gamma \in \mathbb{R}$ $\quad \varrho^{\gamma} \in (0,+\infty)$. Označme $\varrho^{\gamma} = K > 0$.

Výrazy z L: $\cdot \fint_{B_\varrho} |Du|^2 \leq K^2$

$\cdot \fint_{B_\varrho} A Du\, D\varphi \leq \delta K \sup |D\varphi| \quad \ldots\ldots$

$\longrightarrow \quad \fint_{B_\varrho} \left|\frac{Du}{K}\right|^2 \leq 1, \quad \fint_{B_\varrho} A \frac{Du}{K} D\varphi \leq \delta \sup |D\varphi|$

atd

$u \longrightarrow \frac{u}{K}$ se zbavíme γ

Škálování: $\quad x = x_0 + \varrho y \qquad y \in B_1(0)$

$u(x) = v(y) \qquad v$ je def. na $B_1(0)$

$\longrightarrow \quad \fint_{B_1} |\nabla v|^2 \leq \varrho^2 \qquad \nabla v(y) = \nabla(u(x_0+\varrho y)) = (\nabla u)(\ldots)\varrho$

$\fint_{B_1} A \nabla v\, D\varphi \leq \delta \varrho \sup |D\varphi| \ldots\ldots$

<u>Búno:</u> Standardizovat L 4.27 pro $\rho = 1$.

<u>Sporem!</u>

Pp. $\exists \varepsilon > 0,\ \forall \delta > 0,\ \exists A_\delta$ eliptická, $\exists u_\delta \in W^{1,2}(B_1)$

$$\int_{B_1} |Du_\delta|^2 \le 1,\ \left|\int_{B_1} A_\delta Du_\delta D\varphi\right| \le \delta \sup_{B_1} |D\varphi| \quad \forall \varphi \in C_0^1(B_1)$$

$$\& \ \forall h \in W^{1,2}(B_1): \int_{B_1} |u_\delta - h|^2 \geq \varepsilon \ \vee \int_{B_1} |Dh|^2 \geq 1.$$

$\delta = \frac{1}{j}$; $A_\delta = A_j$, $u_\delta = u_j$,

$$\forall h \in W^{1,2}(B_1): \int_{B_1} |Dh|^2 \le 1 \Rightarrow \int_{B_1} |u_j - h|^2 > \varepsilon$$

Limitní přechod:

- lze od u i h odečíst stejnou konstantu $\to$ búno $(u_j)_{B_1} = 0$
- $\int_{B_1} |Du_j|^2 \le 1 \Rightarrow \exists$ vybraná: $u_j \rightharpoonup u \in W^{1,2}(B_1)$
  $u_j \to u$ ve $L^2(B_1)$
- A_j jsou omezené: $\exists$ vybraná $A_j \to A \in \mathbb{R}^{nN \times nN}$
- Ukážeme, že je A harmonická: $\varphi \in C_0^1(B_1)$

$$\int_{B_1} A\, Du\, D\varphi = \int_{B_1} \overset{\mathrm{I}}{(A - A_j)}\, Du_j\, D\varphi + \int_{B_1} A_j \overset{\mathrm{II}}{(Du - Du_j)}\, D\varphi + \overset{\mathrm{III}}{\int_{B_1} A_j\, Du_j\, D\varphi}$$

$\mathrm{II} \longrightarrow 0$ ze slabé konv. $u_j \rightarrow u$ v $W^{1,2}$

$$|\mathrm{I}| \leq \|\nabla u_j\|_2 \|\nabla\varphi\|_\infty \Big(\int_{B_1} |A - A_j|^2\Big)^{1/2} \longrightarrow 0 \text{ z Leb. věty}$$

$$|\mathrm{III}| \leq \frac{1}{j} \|\nabla\varphi\|_{L^\infty(B_1)}$$

$$\mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III} \longrightarrow 0 \quad j \rightarrow +\infty \ \checkmark$$

- $\int_{B_1} |\nabla u|^2 \leq 1$

- Pomocný problém: $-\operatorname{div} A_j(\nabla v_j) = 0$ v $B_1(0)$

$$v_j = u \text{ na } \partial B_1(0)$$

Řešení $v_j \in W^{1,2}(B_1)$ ex.

– a v_j je A_j harmonická

$$- \|u - v_j\|_2^2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Friedrichs}}}{\leq} \|\nabla(u - v_j)\|_2^2 \leq \int_{B_1} A_j \nabla(u - v_j) \nabla(u - v_j) =$$

$$= \underbrace{-\int_{B_1} A_j \nabla v_j \nabla(u - v_j)}_{= 0} + \underbrace{\int_{B_1} (A_j - A) \nabla u \nabla(u - v_j)}_{\xrightarrow[j \to \infty]{} 0} \xrightarrow{j \to +\infty} 0$$

- $\|v_j - u_j\|_2 \xrightarrow{j \to +\infty} 0$ • $\|\nabla u - \nabla v_j\|_2 \xrightarrow{j \to +\infty} 0$

$$\|\nabla v_j\|_2^2 \longrightarrow \|\nabla u\|_2^2 \le 1$$

Korekce: $w_j := v_j \left(\max\left(\|\nabla v_j\|_2, 1\right)\right)^{-1}$

$\longrightarrow$ $\displaystyle\int_{B_1} |\nabla w_j|^2 \le 1$

$\longrightarrow$ w_j je A_j-konkurenční

$\longrightarrow$ $\|u_j - w_j\|_2 \le \underbrace{\|u_j - u\|_2}_{\to 0} + \underbrace{\|u - v_j\|}_{\to 0} +$

$$\|v_j - w_j\|_2 \longrightarrow 0$$

$$\|v_j - w_j\|_2^2 = \int_{B_1} v_j^2 \Big(\underbrace{1 - \frac{1}{\max(1, \|\nabla v_j\|_2)}}_{\longrightarrow 0}\Big)^2$$

Spor s $R := w_j$ pro j dost velké $\perp$.

Bz L 4.28:

$$\text{Vi'me: } \forall \varphi \in C_0^1(B_\varrho): \fint_{B_\varrho} a(x,u)\nabla u \nabla \varphi = 0$$

$$\left| \fint_{B_\varrho} a(x_0,u_0)\nabla u \nabla \varphi \right| \le \fint_{B_\varrho} |(a(x_0,u_0) - a(x,u))| |\nabla u| |\nabla \varphi|$$

$$\le \sup_{B_\varrho} |\nabla \varphi| \left(\fint_{B_\varrho} |\nabla u|^2\right)^{1/2} \underbrace{\left(\fint_{B_\varrho} |a(x_0,u_0) - a(x,u)|^2\right)^{1/2}}_{(A)}$$

$$(A) \le \left(\fint_{B_\varrho} \left[\cancel{\omega(|x-x_0|} + |u-u_0|)\right]^2\right)^{1/2}$$

$$\le \left(\fint_{B_\varrho} |a(x_0,u_0) - a(x,u)|\right)^{1/2} c(L)$$

$$\le c(L)\left(\fint_{B_\varrho} \omega(|x_0-x| + |u_0-u|)\right)^{1/2}$$

$$\overset{\text{Jensen}}{\le} c(L)\left[\omega\left(\varrho + \left(\fint_{B_\varrho} |u_0-u|^2\right)^{1/2}\right)\right]^{1/2}$$

$\perp$

L 4.21: Kontroluji $E(u, x_0, R) < \varepsilon_0^2$

$$E(u, x_0, R) = \fint_{B_R(x_0)} |u - (u)_{x_0,R}|^2 \leq \fint_{B_R(x_0)} |\nabla u|^2 R^2$$

Poincaré

$$\leq \fint_{B_{2R}(x_0)} |u - (u)_{x_0,2R}|^2$$

u slabé řešení

Caccioppoli

$$\tilde{E}(u, x_0, R) := \fint_{B_R(x_0)} |\nabla u|^2 R^2$$