21.12.

Dk (Lemma 3.2):

2 Krok: 1. (3.14) $\Rightarrow \exists \alpha, \beta > 0, \forall t > 0$:

$$\int_{\{g>t\}} g^p \le \alpha t^{p-1} \int_{\{g>t\}} g + \beta \int_{\{h>t\}} h^p$$

2. 1. $\Rightarrow$ zřejmé.

K1. a) Calderon–Zygmundova dekompozice:

- dyadické krychle v $\mathbb{R}^n$
- sjednocení hranic všech dyadických krychlí má míru 0
- x neleží na hranici dyadické krychle

x .... $\{Q_k^x\}_{k\in\mathbb{Z}}$ ... posl. dyad. krychlí ve kterých x leží

Q_k^x má délku hrany 2^k

- $\lim_{k\to+\infty} \fint_{Q_k^x} g^p = 0$
- Fix $s > 0$; def. $k_x := \max\{k\in\mathbb{Z};\ \fint_{Q_k^x} g^p \ge s^p\}$

pokud ex., takové x patří do F

- $\{Q_{k_x}^x\}_{x\in F}$ spočetná množina

• $\cancel{\fint_{2Q^*_k} g^p}$ $\fint_{Q^*_{k+1}} g^p < s^p \Rightarrow \fint_{Q^*_{k}} g^p \le \frac{1\cdot 2^n}{2^n|Q^*_k|}\int_{Q^*_{k+1}} g^p = 2^n \fint_{Q^*_{k+1}} g^p$

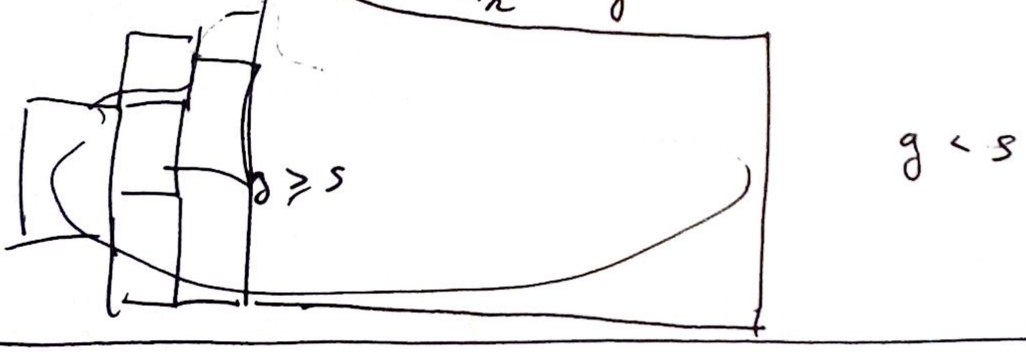
$$< 2^n s^p$$

• $G := \mathbb{R}^n \setminus F$: z Leb. věty $\Rightarrow$ $g \le s$ s.v. na G

Shrnutí: $\{Q_k\}$ • $s^p \le \fint_{Q_k} g^p \le 2^n s^p$

• $\{g > s\} \subset \bigcup Q_k$ (až na množinu 0 míry)

• Q_k disj.



---

b) Použití předpokladu na Q_k $(K > 1)$

$$s = (s^p)^{\frac{1}{p}} \le \left(\fint_{Q_k} g^p\right)^{1/p} \le K \fint_{2Q_k} g + \left(\fint_{2Q_k} h^p\right)^{1/p}$$

ať $t < s$ fixované;

• $$\fint_{2Q_k} g \le \frac{c}{|Q_k|}\int_{2Q_k\cap\{g>t\}} g \quad + \quad t$$

• $$\left(\fint_{2Q_k} h^p\right)^{1/p} \le \frac{c}{|Q_k|^{1/p}}\left(\int_{2Q_k\cap\{h>t\}} h^p + |Q_k|\, t^p\right)^{1/p}$$

$$\le \left(\frac{c}{|Q_\ell|}\int_{2Q_\ell\cap\{h>t\}} h^p\right)^{1/p} + ct$$

~~Dalszmady:~~

$$\cancel{S \le \frac{c}{|Q_\ell|}\int}$$

$$\le \left(\frac{c}{|Q_\ell|}\int_{2Q_\ell\cap\{h>t\}} h^p \frac{(Kt)^{p-1}}{(Kt)^{p-1}}\right)^{1/p} + ct$$

$$\le \frac{c}{|Q_\ell|}\int_{2Q_\ell\cap\{h>t\}} h^p \frac{1}{(Kt)^{p-1}} + ctK + ct$$

Dalszmady:

$$S \le K\frac{c}{|Q_\ell|}\int_{2Q_\ell\cap\{g>t\}} g + Kt$$

$$+ \frac{c}{Kt^{p-1}|Q_\ell|}\int_{2Q_\ell\cap\{h>t\}} h^p + ctK + ct$$

Vallon s: $s \sim cKt$

$$Kt \le K\frac{c}{|Q_\ell|}\int_{2Q_\ell\cap\{g>t\}} g + \frac{c}{(Kt)^{p-1}|Q_\ell|}\int_{2Q_\ell\cap\{h>t\}} h^p$$

$$|Q_\ell|\, t^p K^p \le K(tK)^{p-1}\frac{c}{}\int_{2Q_\ell\cap\{g>t\}} g + c\int_{2Q_\ell\cap\{h>t\}} h^p$$

c) Pokrývací věty: Vitali:

Ex. ∃ podsystém $\{2Q_\ell\}$ přičemž značme ho $\{2\tilde{Q}_\ell\}$ takový, že

- $\{2\tilde{Q}_\ell\}$ je po 2 disj.
- $\bigcup_{\ell \in \mathbb{N}} 2Q_\ell \subset \bigcup_{\ell \in \mathbb{N}} 6\tilde{Q}_\ell$

d)

$$\int_{\{g>s\}} g^p \le \int_{\bigcup Q_\ell} g^p \le \sum_{\ell \in \mathbb{N}} \int_{Q_\ell} g^p \overset{Cz}{\le} \sum_{\ell \in \mathbb{N}} C|Q_\ell| s^p$$

$$\le C \left|\bigcup Q_\ell\right| s^p \le C \left|\bigcup \tilde{Q}_\ell\right| s^p \le$$

$$\le C \sum_\ell |\tilde{Q}_\ell| s^p \le \sum_\ell K (tK)^{p-1} C \int_{2\tilde{Q}_\ell \cap \{g>t\}} g + C \int_{2\tilde{Q}_\ell \cap \{h>t\}} h^p$$

$$\le K^p t^{p-1} C \int_{\{g>t\}} g + C \int_{\{h>t\}} h^p$$

$$\int_{\{g \in [t,s]\}} g^p \le s^{p-1} \int_{\{g>t\}} g \le K^{p-1} t^{p-1} \int_{\{g>t\}} g$$

Sečtení dává: $\int_{\{g>t\}} g^p \le CK^p t^{p-1} \int_{\{g>t\}} g + C \int_{\{h>t\}} h^p$