Motivace

1) $y' = ay$ na $(0,+\infty)$

$y(0) = y_0$

y_0, a daná $\in \mathbb{R}$

řešení $y(t) = e^{at} y_0$

ekvilibrium $y = 0$

$a < 0$ ... stabilita

$a > 0$ .... nestabilita

a .... matice 1×1

a je její vl. č.

2) $y' = Ay$ na $(0,+\infty)$

$y(0) = y_0$

$y_0 \in \mathbb{R}^n$; $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ dáno

řešení: $y\,\cancel{(t)} : \cancel{\mathbb{R}}\,[0,+\infty) \to \mathbb{R}^n$

$y(t) = e^{At} y_0$

ekvilibrium $y = 0$

$\sigma(A) \subset \{\operatorname{Re} z < 0\}$ ... stabilita

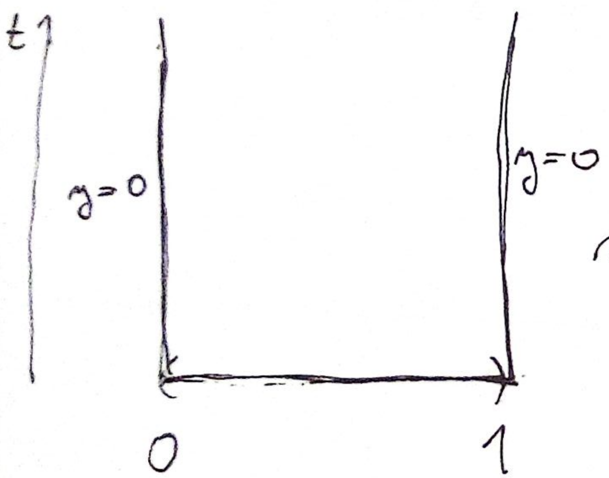
$\not\subset$ ... nestabilita

3) $\partial_t y = \partial_{xx} y$ na $(0,+\infty)\times(0,1)$

$y(0) = y_0$

$y = 0 \quad x = 0$ nebo $x = 1$

$y_0 : (0,1) \to \mathbb{R}$ daná



$y : (0,+\infty)\times(0,1) \to \mathbb{R}$

řešení: $y(t,x) = \left[e^{(\partial_{xx})t} y_0\right](\ ,x)$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(n\pi x)\, e^{-n^2\pi^2 t}$$

$$B_n = 2\int_0^1 \sin(n\pi x)\, y_0(x)\, dx$$

→ ekvilibrium $y \equiv 0$ je stabilní

4) Normální operátory

$AA^* = A^*A$

- symetrické matice – diagonalizovatelné pomocí unitárních transformací

$UA = DU$

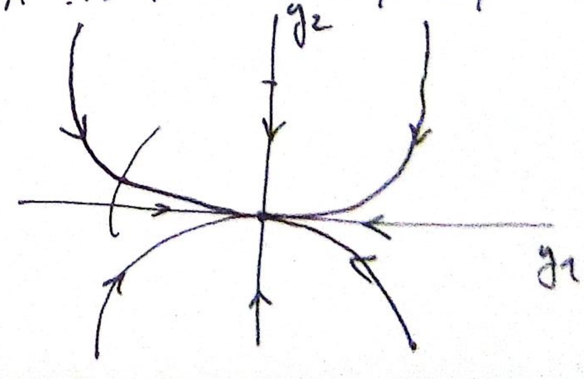
unitární

diag.

5) $y' = Ay$

$y(0) = y_0$

A ... normální, 2D, $\sigma(A) \subset \{\operatorname{Re} z < 0\}$



6) $y' = Ay$

$y(0) = y_0$

A není normální

má 2 vl. vektory

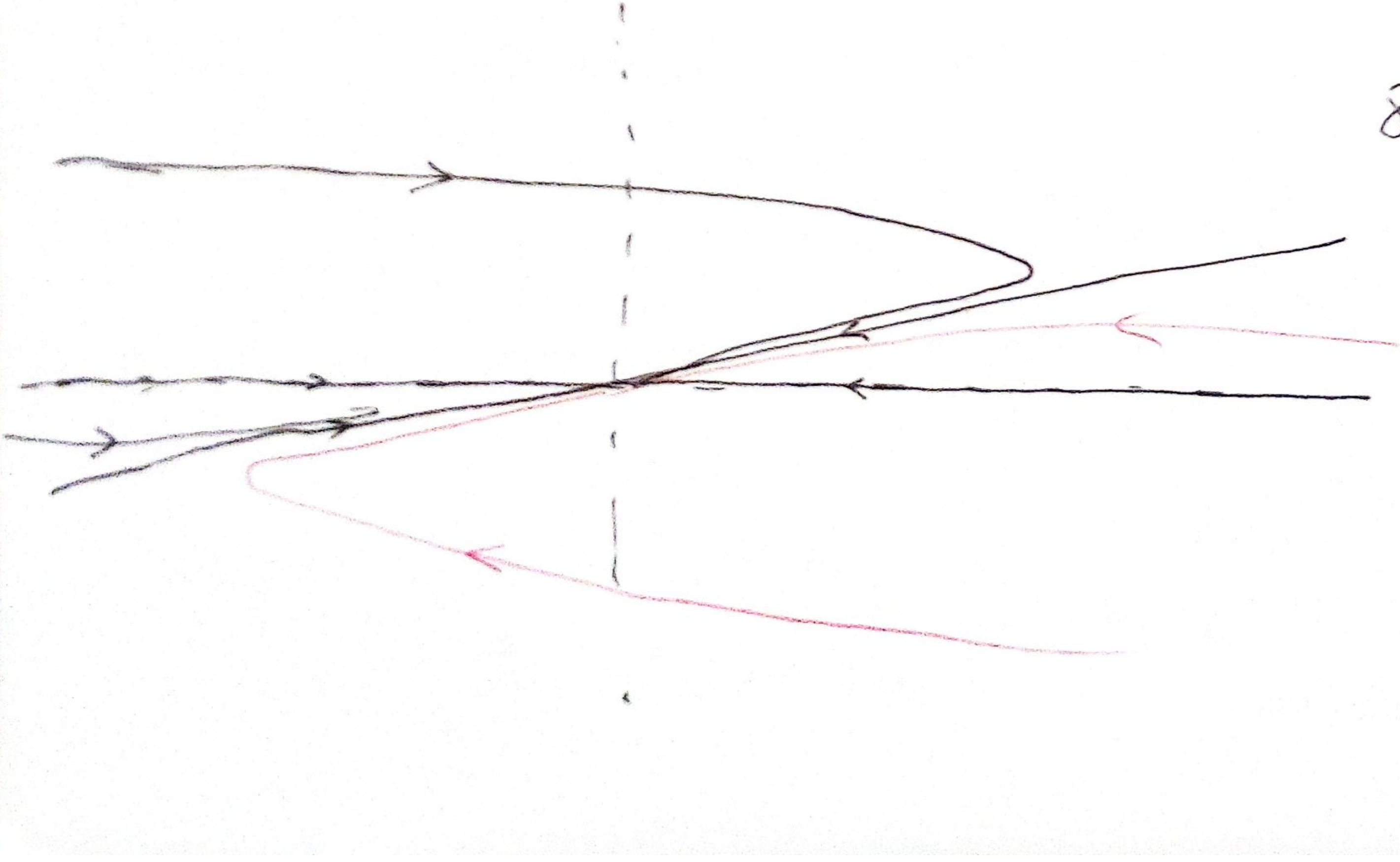
$\sigma(A) \in \{\mathrm{Re}\, z < 0\}$

7) Princip linearizování

Nestability

$y' = f(y)$ f nelineární

$y(0) = y_0$ $f(0) = 0$

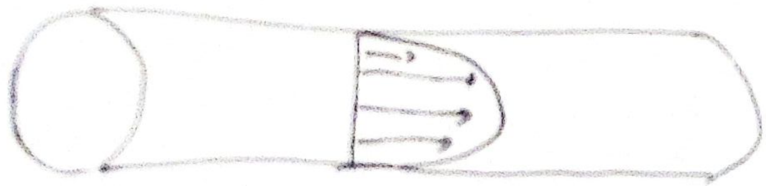


8) Pseudospektrum

$\varepsilon > 0$

$\|(A - \lambda I)^{-1}\| \geq \frac{1}{\varepsilon}$

9) mechanika tekutin



NSR: $\operatorname{div} \tilde{u} = 0$

$$\partial_t \tilde{u} = -\nabla \tilde{p} + \frac{1}{Re} \Delta \tilde{u} - (\tilde{u} \cdot \nabla) \tilde{u} \quad ; \quad \tilde{u} : (0,+\infty) \times \text{Trubka} \to \mathbb{R}^3$$
$$\tilde{p} : \phantom{(0,+\infty) \times \text{Trubka}} \to \mathbb{R}$$

$\tilde{u} = 0$ na hranici trubky

$v = \tilde{u} + u$; u perturbace

řešení

Rovnice pro perturbace linearizovaná:

$\operatorname{div} u = 0$

$$\partial_t u = \underbrace{-\nabla p + \frac{1}{Re} \Delta u - (u \cdot \nabla) \tilde{u} - (\tilde{u} \cdot \nabla) u}_{Lu,\ L \text{ není normální}}$$

$\hat{u} = 0$ na hranici

10) Problém:

Hypotéza:

$\sigma(L) \subset \{\operatorname{Re} z < 0\}$

Problém: V experimentu je vidět ztráta stability.

Závisí na velikosti Re (Reynoldsova čísla).

$Re \sim 2000,\ 100\,000$