15. Exponenciály operátorů

- Cílem jsou spodní odhady na $\|e^{tA}\|$, pomocí (pseudo) spekter
- Tři části : - Semigrupy ("standardní")
  - Věty o $\|e^{tA}\|$ pomocí absciss $\alpha(A)$ či $\alpha_\varepsilon(A)$
  + Nilpotentní operátory
  - Příklad (obrázky), který ukáže že ty odhady dávají užitečnou informaci.
  (Použito v kap. 12)

Semigrupy

Umíme $x' = ax \rightsquigarrow x(t) = ce^{at}$, $c = x(0)$

$x' = Ax \longrightarrow x(t) = ce^{tA}$, $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$, $x \in \mathbb{R}^d$, $\vec{c} = \vec{x}_0$

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} A^n/n!$$

Taková definice funguje i pro A lineární a omezený na BS X (tedy $\mathcal{D}_A = X$), neboť $\|e^A\| \le e^{\|A\|} < \infty$

Tedy řešení i ~~u~~ $u'(t) = Au(t)$, $u(0) = u_0$ je opět dáno e^{tA}.

Poznamenejme, že pro e^{ax} je $e^0 = 1$ i $e^{a(t+s)} = e^{at}e^{as}$ a je spojité.

Co dělat pro neomezený operátor A?

Def.

Fce $S(t) : [0,\infty) \longrightarrow \mathcal{L}(X)$ nazveme C_0-semigrupou, jestliže

(i) $S(0)x = x$, $\forall x \in X$

(ii) $S(t)S(s) = S(t+s)$, $\forall t,s \ge 0$

(iii) $S(t)x \longrightarrow x$, $t \to 0_+$, $\forall x \in X$

Pozn. kandidát na zobecnění e^{ta} "=" $S(t)$

Pozn plyne z toho, že $t \longmapsto S(t)x$ je spojité z $[0,\infty)$ do X, $\forall x \in X$.

Def

Operátor $(A, \mathcal{D}_A)$ je generátor C_0-semigrupy $S(t)$, jestliže

(i) $Ax = \lim_{h \to 0+} \frac{S(h)x - x}{h}$ značí se $\underline{S(t) = e^{tA}}$

(ii) $\mathcal{D}_A = \left\{ x \in X ; \lim_{h \to 0+} \frac{S(h)x - x}{h} \text{ existuje} \right\}$

Platí tvrzení:

A neomezený uzavřený op. na hustém $\mathcal{D}_A$ splňující, že $\forall \lambda > \omega$, $\lambda \in \varrho(A)$

a $\omega \in \mathbb{R}$ a navíc $\|(\lambda - A)^{-n}\|_{\mathcal{L}(X)} \le \frac{M}{(\lambda - \omega)^n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ a M pevné.

Pak je A generátor C_0-semigrupy S splňující $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \le M e^{\omega t}$.

Př.

$\partial_t u - \Delta u = 0$ v $(0,T) \times \Omega$ zde je $X = L^2(\Omega)$, $\mathcal{D}_A = W_0^{1,2} \cap W^{2,2}$ hustý

$u(0) = u_0$ $A := \Delta$

$u|_\Gamma = 0$ $(0, \infty) \subset \varrho(A)$, $\|(\lambda - A)^{-1}\| \le 1/\lambda$

a ovšem A je uzavřený: $u^n \to u$ v L^2, $Au^n \to f$ v L^2 $\overset{?}{\Rightarrow}$ $u \in \mathcal{D}_A$, $Au = f$

Dostaneme semigrupu $S \to \underline{u(t)} = S(t) u_0$

Př.

$\partial_t u - \Delta u = f$, $f \in L^1(0,T, L^2(\Omega))$

Pak $\underline{u(t)} = S(t) u_0 + \int_0^t S(t - \tau) f(\tau)\, d\tau$

Věta 15.1.

Buď A matice / lin. omez. op / lin. uzavřený op. generující C_0-semigrupu $\underbrace{e^{tA}}_{= S(t)}$

Potom ex. $\omega \in \mathbb{R}$, $M \ge 1$, že

$$\|e^{tA}\| \le M e^{\omega t}, \quad t \ge 0 \tag{15.1}$$

Dále každé $z \in \mathbb{C}$ splňující $\operatorname{Re} z > \omega$ je prvkem $\varrho(A)$ a platí

$$(z - A)^{-1} = \int_0^\infty e^{-zt} e^{tA}\, dt \tag{15.2}$$

Je-li A matice / lin. omez. op., potom

$$e^{tA} = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma e^{zt} (z - A)^{-1}\, dz, \tag{15.3}$$

kde Γ je uzavřená křivka v $\mathbb{C}$ obsahující $\sigma(A)$ ve svém vnitřku

Pozn.

Platí i obecněji ... A sektorový operátor

Věta 15.2.

Je-li A matice či omez. lin. op. a $\varepsilon > 0$, pak platí

$$\|e^{tA}\| \le \frac{L_\varepsilon}{2\pi\varepsilon} e^{t\alpha_\varepsilon(A)}, \quad \forall t \ge 0, \qquad (15.4)$$

kde L_ε je délka hranice $\sigma_\varepsilon(A)$ (nebo konvexního obalu)

a $\alpha_\varepsilon(A) = \sup\{\operatorname{Re} z \,;\, z \in \sigma_\varepsilon(A)\}$ je abscissa pseudospektra

Dk. (pro hranici, ne konvexní obal)

$$\|e^{tA}\| \overset{(15.3)}{=} \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma e^{zt}(z-A)^{-1}\,dz \right\| \le \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma \underbrace{|e^{zt}|}_{= e^{\operatorname{Re} zt}} \|(z-A)^{-1}\|\,dz$$

$$\overset{\Gamma = \sigma_\varepsilon}{\le} \frac{1}{2\pi\varepsilon} \int_\Gamma e^{t\alpha_\varepsilon(A)}\,dz = \frac{L_\varepsilon}{2\pi\varepsilon} e^{t\alpha_\varepsilon(A)}$$

■

Dolní odhady

Věta 15.3

Pro omez./neomez. uz. op. A generující C_0-semigrupu platí

$$\|e^{tA}\| \ge e^{t\alpha(A)}, \quad \forall t \ge 0. \qquad (15.5)$$

Je-li A omez. lin. operátor, pak

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \|e^{tA}\| = \alpha(A) \qquad (15.6).$$

Dk.

Ad (15.6).

Z (15.5) je $\log \|e^{tA}\| \ge t\alpha(A)$

$$\Rightarrow \liminf_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \|e^{tA}\| \ge \alpha(A)$$

Druhý odhad? A je omezený, tedy použijeme odhad (15.4)

$$\log \|e^{tA}\| \le \log\left[\frac{L_\varepsilon}{2\pi\varepsilon} e^{t\alpha_\varepsilon(A)}\right] = \log \frac{L_\varepsilon}{2\pi\varepsilon} + t\alpha_\varepsilon(A)$$

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \|e^{tA}\| \le \limsup_{t\to\infty} \left(\frac{1}{t} \frac{L_\varepsilon}{2\pi\varepsilon} + \alpha_\varepsilon(A)\right) = \alpha_\varepsilon(A).$$

Přechod $\varepsilon \to 0+$ nám dá odhad $\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \|e^{tA}\| \le \alpha(A)$,

což dokončuje důkaz (15.6).

Pro omez. op. A by mělo být $\lim_{\varepsilon\to 0+} \alpha_\varepsilon(A) = \alpha(A)$ ... $\bigcap_\varepsilon \sigma_\varepsilon = \sigma$, $\sigma \ne \emptyset$

$\sigma_{\varepsilon_1} \subset \sigma_{\varepsilon_2}$, $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$

Co s neomez... viz kap 19.

Ad (15.5). ↯

Sporem. Tedy předpokládejme, že $\exists \tau > 0 : \|e^{\tau A}\| =: a < e^{\tau \alpha(A)}$.

A generuje semigrupu, máme tedy $\omega \in \mathbb{R}$ a $M \geq 1$. Ať $\omega \leq 0$.

Můžeme odhadnout $\|e^{tA}\| \leq M$, $t \in [0, \tau)$

Pro $t \in [\tau, 2\tau)$ je $\|e^{tA}\| \leq \|e^{\tau A}\| \, \|e^{(t-\tau)A}\| \leq M \cdot a$,

nebot $S(t+s) = S(t)S(s)$ a $\mathcal{L}(X)$ je BA

Tedy $\forall n \in \mathbb{N}_0$ je $\|e^{tA}\| \leq M a^n$, $t \in [n\tau, (n+1)\tau)$.

Označme $a = e^{\tau \tilde{\omega}}$, $\tilde{\omega} < \alpha(A) = \sup\{\operatorname{Re} z ; z \in \sigma(A)\}$

ovšem $\alpha(A) \leq 0$, neboť z V15.1 je, že každé $z \in \mathbb{C}$,

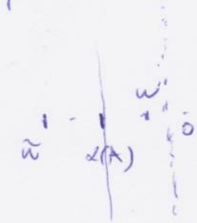
$\operatorname{Re} z > \omega$, $z \in \varrho(A)$ (a $\omega \leq 0$) $\Rightarrow \tilde{\omega} < 0$

Tedy $\|e^{tA}\| \leq M e^{n\tau\tilde{\omega}} \overset{\tilde{\omega}<0!}{\leq} M e^{(n+1)\tau\tilde{\omega}} e^{-\tau\tilde{\omega}}$

$\leq \tilde{M} e^{t\tilde{\omega}}$

Dle V15.1 platí: $\forall z \in \mathbb{C}$: $\operatorname{Re} z > \omega \Rightarrow z \in \varrho(A)$

$\operatorname{Re} z > \tilde{\omega}$



To je spor, neboť $\tilde{\omega} < \alpha(A)$

Obdobně případ $\omega > 0$.

Naším cílem bude další tvrzení s dlouhým zněním.

Naším cílem bude další tvrzení s dlouhým zněním. Provedeme řadu výpočtů (tj. důkaz) a poté zformulujeme větu.

Mějme A generující C_0-semigrupu (ať už omezené či nikoliv)

Mějme A generující C_0-semigrupu (ať už omezené či nikoliv). Dostáváme čísla $\omega \in \mathbb{R}$ a $M \geq 1$.

Pro $z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} z > \omega$, dostáváme

$$\|(z-A)^{-1}\| = \left\| \int_0^\infty e^{-zt} e^{tA} \, dt \right\| \leq \sup_{t \geq 0} \|e^{tA}\| \int_0^\infty e^{-\operatorname{Re} z \cdot t} \, dt$$

$$= \frac{1}{\operatorname{Re} z} \sup_{t \geq 0} \|e^{tA}\|, \text{ je-li } \operatorname{Re} z > 0.$$

Tedy $\operatorname{Re} z \cdot \|(z-A)^{-1}\| \leq \sup_{t \geq 0} \|e^{tA}\|$ pro $\operatorname{Re} z > 0$.

(musí $\omega \leq 0$?)

"Vezmeme vezní hodnotu z, odpovídající $\alpha_\varepsilon(A)$", tedy

- $\frac{1}{\varepsilon}\alpha_\varepsilon(A) \le \sup_{t\ge 0}\|e^{tA}\|$, $\forall \varepsilon>0$.

Potom i

- $$\underbrace{\sup_{\varepsilon>0}\frac{\alpha_\varepsilon(A)}{\varepsilon}}_{=\sup_{\operatorname{Re} z>0}\operatorname{Re} z\,\|(z-A)^{-1}\|} =: \boxed{\mathcal{K}(A) \le \sup_{t\ge0}\|e^{tA}\|}$$

~~$\mathcal{K}$~~ $\mathcal{K}(A)$ je Kreissova konstanta.

To je vlastně jedna polovina hlavní věty. Označme dále $M_\tau = \sup_{0<t\le\tau}\|e^{tA}\|$

Jako dříve dostáváme, že $\|e^{tA}\| \le M_\tau^n$, $t\in((n-1)\tau, n\tau]$

Pro $z\in\mathbb{C}$, $\operatorname{Re} z>\omega$ máme (15-2)

$$\|(z-A)^{-1}\| \le \sum_{j=0}^{\infty}\int_{j\tau}^{(j+1)\tau}|e^{-zt}|\,\|e^{tA}\|\,dt \le \sum_{j=0}^{\infty}\int_{j\tau}^{(j+1)\tau} e^{-\operatorname{Re} z\cdot t} M_\tau^{j+1}\,dt$$
$$= \int_0^\tau e^{-\operatorname{Re} z\, t}\,dt \left(\sum_{j=0}^{\infty} e^{-\operatorname{Re} z\cdot j\cdot\tau} M_\tau^{j+1}\right)$$

Ať $M_\tau < e^{\operatorname{Re} z\,\tau}$, pak můžeme řadu sečíst:

$$\sum_{j=0}^{\infty} e^{-\operatorname{Re} z\cdot j\cdot\tau}M_\tau^{j+1} = M_\tau\sum_{j=0}^{\infty}\left(e^{-\operatorname{Re} z\cdot\tau}M_\tau\right)^j = \frac{M_\tau}{1-M_\tau e^{-\operatorname{Re} z\cdot\tau}}$$

$$\int_0^\tau e^{-\operatorname{Re} z\, t} = \frac{1-e^{-\operatorname{Re} z\cdot\tau}}{\operatorname{Re} z}$$

Tedy $\operatorname{Re} z\cdot\|(z-A)^{-1}\| \le M_\tau\dfrac{1-e^{-\operatorname{Re} z\cdot\tau}}{1-M_\tau e^{-\operatorname{Re} z\cdot\tau}} = \dfrac{e^{\operatorname{Re} z\cdot\tau}-1}{\frac{1}{M_\tau}e^{\operatorname{Re} z\cdot\tau}-1}$

$$\Rightarrow \frac{1}{M_\tau}e^{\operatorname{Re} z\cdot\tau} \le \frac{e^{\operatorname{Re} z\cdot\tau}-1}{\operatorname{Re} z\cdot\|(z-A)^{-1}\|}+1$$

- $$e^{\operatorname{Re} z\cdot\tau}\left(1+\frac{e^{\operatorname{Re} z\cdot\tau}-1}{\operatorname{Re} z\cdot\|(z-A)^{-1}\|}\right)^{-1} \le \underline{\underline{M_\tau}} = \sup_{t\in(0,\tau]}\|e^{tA}\| \qquad (15\text{-}11)$$

Ať $M_\tau \ge e^{\operatorname{Re} z\cdot\tau}$

Pak $M_\tau \ge e^{\operatorname{Re} z\cdot\tau}\cdot(\ )^{-1}$, neboť $(\ )>1$, tedy platí tento odhad i v této situaci.

• Z tohoto plyne, že $\alpha_\varepsilon(A)$ musí být konečná.

Uvažujme, že pro libovolně velké hodnoty $\operatorname{Re} z$

je $z \in \sigma_\varepsilon(A)$ (ε pevné), tedy $\|(z-A)^{-1}\| \geq 1/\varepsilon$

Buď $c > 0$ a $\tau := c/\operatorname{Re} z$, z odhadu je

$$\sup_{t \in [0,\tau]} \|e^{tA}\| \geq \frac{e^c}{1 + e^c \frac{\varepsilon}{\operatorname{Re} z}}$$

Pro $\operatorname{Re} z \to \infty$ je tedy $\|e^{tA}\|$ libovolně velká pro libovolně krátké časy. Nicméně z <u>V15.1</u> je $\|e^{tA}\| \leq Me^{\omega t}$. Spor.

Ať nyní $\operatorname{Re} z \leq 0$, pro $\omega = 0$. Tedy $\|e^{tA}\| \leq M$, $\forall t \geq 0$.

Opět bychom položili $\|e^{\tau A}\| = P$, pak pro $t \in [0,\tau]$:

$\|e^{tA}\| \leq M$, $\|e^{(t+\tau)A}\| \leq PM$, $\|e^{(t+2\tau)A}\| \leq P^2 M \dots$

Pro $P < e^{\tau \operatorname{Re} z}$ dostaneme

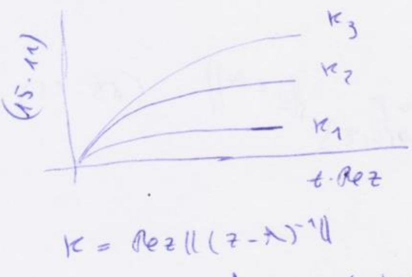
$$\frac{1}{M} \operatorname{Re} z \cdot \|(z-A)^{-1}\| \leq \frac{1 - e^{-\tau \operatorname{Re} z}}{1 - Pe^{-\tau \operatorname{Re} z}}$$

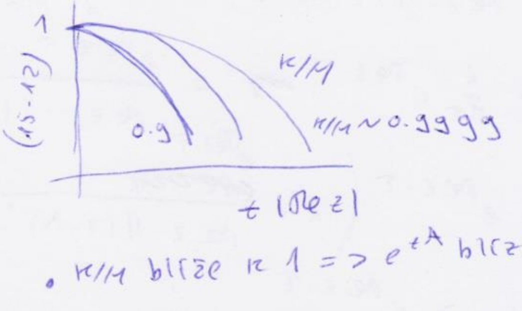
a dostaneme • $\|e^{\tau A}\| \geq e^{\tau \operatorname{Re} z} - M \dfrac{e^{\tau \operatorname{Re} z} - 1}{\operatorname{Re} z \|(z-A)^{-1}\|}$, $\forall \tau \geq 0$. (15.12)

Speciálně pro $\operatorname{Re} z = 0$ je

$$\bullet\ \|e^{\tau A}\| \geq 1 - \frac{\tau M}{\|(z-A)^{-1}\|} \qquad (15.13)$$

Dále jsou obrázky odhadů (15.11) a (15.12)





$K = \operatorname{Re} z \|(z-A)^{-1}\|$

• K/M blíže k 1 $\Rightarrow e^{tA}$ blízko 1

Norma e^{tA} musí být v daném čase aspoň tak velká jako odpovídající hodnota na křivce

• Větší K $\Rightarrow$ déle se chová e^{tA} jako $e^{\operatorname{Re} \tau}$

Pro úplnost to shrňme

Věta 15.4.

Buď A matice či uzav. lin. op. generující C_0-semigrupu.

Je-li $K = \operatorname{Re} z \, \|(z-A)^{-1}\|$, $z \in \mathbb{C}$ t.ž. $\operatorname{Re} z > 0$ a $K > 1$,

pak
$$\sup_{t \geq 0} \|e^{tA}\| \geq K \qquad (15.7)$$

Dále
$$\sup_{t \geq 0} \|e^{tA}\| \geq \frac{1}{\varepsilon} \alpha_\varepsilon(A), \ \forall \varepsilon > 0 \qquad (15.8)$$

$$\sup_{t \geq 0} \|e^{tA}\| \geq \mathcal{K}(A), \qquad (15.9)$$

kde
$$\mathcal{K}(A) = \sup_{\varepsilon > 0} \frac{1}{\varepsilon} \alpha_\varepsilon(A) = \sup_{\operatorname{Re} z > 0} \operatorname{Re} z \, \|(z-A)^{-1}\| \qquad (15.10)$$

~~Je-li~~ Dále je $\alpha_\varepsilon(A)$ konečné pro každé $\varepsilon > 0$.

Je-li $a = \operatorname{Re} z$, pak $\forall \tau > 0$ Lokální
$$\sup_{t \in (0,\tau]} \|e^{tA}\| \geq e^{a\tau} \left(1 + \frac{e^{a\tau} - 1}{K}\right)^{-1} \qquad (15.11)$$

Je-li $\|e^{tA}\| \leq M$, $\forall t \geq 0$, pak pro $a < 0$ a $\forall \tau \geq 0$ platí Bodový
$$\|e^{\tau A}\| \geq e^{a\tau} - M \frac{e^{a\tau} - 1}{K} \qquad (15.12)$$

pro $K/M \in (-\infty, 1]$.

Speciálně pro $K = a = 0$ je
$$\|e^{\tau A}\| \geq 1 - \frac{\tau M}{\|(z-A)^{-1}\|} \qquad (15.13).$$

Pozn.

Obdobou je ještě Věta 15.5 pro posunutý argument

Věta 15.6 (Nilpotentní operátory)

Buď A uz. lin. op. generující C_0-semigrupu. Pro každé $\tau > 0$ je
$$e^{\tau A} = 0 \iff \sigma(A) = \emptyset \text{ a } \|(z-A)^{-1}\| = \mathcal{O}\left(e^{-\tau \operatorname{Re} z}\right), \ \operatorname{Re} z \to -\infty.$$

"Dk"

$u \in X$, $v \in X^*$, $\|u\| = 1 = \|v\|$

$$\langle v, ((\eta + i\xi) - A)^{-1} u \rangle_X = \int_0^\infty e^{-it\xi} f(t)\, dt, \quad z = \eta + i\xi, \ \eta > \omega, \quad f(t) = \langle v, e^{-t\eta} e^{tA} u \rangle_X$$

+ Phragmén–Lindelöf

+ Paley–Wiener +

Příklad

Řídké matice 55×55 (model Boeingu 767)

$A_u + BKC$, $B \in \mathbb{R}^{55 \times 2}$, $C \in \mathbb{R}^{2 \times 55}$, $K \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ (4 parametry)

Matice A_u (nestabilní), $\alpha(A_u) \sim 0.10$

A_s (stabilní), $\alpha(A_s) \sim -0.078$ (optimalizace)

klasicky bychom řekli, že A_s bude "pěkná". Ale nebude.

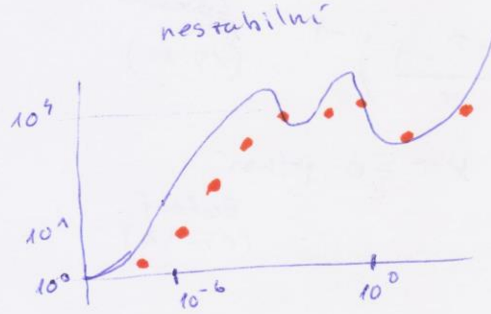
$\|e^{tA_s}\|$ je $6\times$ větší než $\|e^{tA_u}\|$ pro $t \sim 1$

$\|e^{tA_s}\|$ je pro $t \gg 10$ klesající a malá,

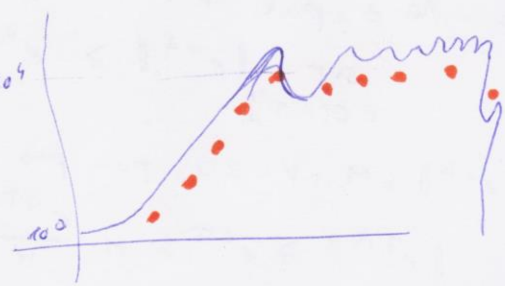
ale pro čas $t \sim 12.5$ nabude veliké hodnoty

Z dolních odhadů, které jsme dovodili lze získat náhled na hodnoty těchto maxim

nestabilní



stabilní



• (15.11)

log-log škála

Druhá matice je tedy stabilní, ale není vhodná pro praxi.

Odkazy na články... + EigTool

Obrázky ε-pseudospekter