Zápočtová písemka z Matematické analýzy 1, ZS 2021-22

Písemka číslo 3, verze Úterý 14:00

Jednotlivé kroky při výpočtech stručně odůvodněte.

(1) Spočtěte limitu funkce
$$\lim_{x\to 1}\frac{e^x-e}{\sin(\pi x)} = L$$

(2) Spočtěte limitu funkce
$$\lim_{x\to 0_+}\frac{\lg(x)}{\sin(x)}\exp(-\frac{1}{x}) = \tilde{L}$$

(3) Spočtěte derivaci funkce $f(x)=\sin(x^x)$ ve všech bodech, kde existuje.

1) $$L = \lim_{x\to 1}\frac{e(e^{x-1}-1)}{x-1}\cdot\frac{x-1}{\sin(\pi(x-1)+\pi)} \overset{AL}{=} \frac{e}{\pi}\lim_{x\to 1}\frac{\pi(x-1)}{\sin(\pi(x-1))(-1)}$$

$= -\frac{e}{\pi}$, používala se věta o limitě složené funkce s vnitřní funkcí $g_1(x)=\pi(x-1)$ a $g_2(x)=x-1$. Obě tyto funkce jsou prosté a tedy splňují podmínku (P) z Věty 3.6.

2) $$\tilde{L} = \lim_{x\to 0+}\underbrace{x\cdot\lg x}_{\to 0 \text{ z růstové škály}}\cdot\underbrace{\frac{x}{\sin x}}_{\to 1 \text{ std. limita}}\cdot\underbrace{\frac{1}{x^2}\exp\left(-\frac{1}{x}\right)}_{\to 0 \text{ z růstové škály}} = 0$$

$y^2\cdot e^{-y}\to 0$ pro $y\to+\infty$

$\frac{1}{x}\longrightarrow+\infty$ pro $x\to 0+$

+ (P) $\frac{1}{x}\neq+\infty$ $\forall x\in\mathbb{R}$

3) Derivace f ex. pro $x>0$, protože $f(x)=\sin(\exp(x\cdot\lg x))$.

Pro $x>0$ platí: $f'(x)=\cos(x^x)(x^x)(\lg x+1)$