__Věta o implicitním zobrazení__: Nechť $n, m \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $G \subset \mathbb{R}^{n+m}$ je otevřená množina, $F: G \to \mathbb{R}^m$, $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$, $\tilde{y} \in \mathbb{R}^m$, $[\tilde{x}, \tilde{y}] \in G$ a nechť platí

i) $F \in C^p(G)$

ii) $F(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0$

iii)
$$\begin{vmatrix} \partial_{y_1} F_1 & \cdots & \partial_{y_m} F_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_{y_1} F_m & \cdots & \partial_{y_m} F_m \end{vmatrix}_{(\tilde{x}, \tilde{y})} \neq 0$$

Pak existuje okolí $U \subset \mathbb{R}^n$ bodu $\tilde{x}$ a okolí $V \subset \mathbb{R}^m$ bodu $\tilde{y}$ taková, že $U \times V \subset G$ a pro každé $x \in U$ existuje právě jedno $y \in V$ s vlastností $F(x, y) = 0$. Označíme-li toto $y$ jako $\varphi(x)$, je $\varphi: U \to V$ a $\varphi \in C^p(U)$.

Pozn: $U$ je konvexní tak, aby platilo $\varphi \in C^p(U)$.

Dk: 1) Volba normy v $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^m$, atd.

Protože jsou všechny normy v prostoru $\mathbb{R}^n$ ekvivalentní, je jedno vzhledem k jaké normě okolí a spojitost zobrazení měříme.
Dále budeme pracovat s normou $\|x\|_\infty := \max_{i \in \{1, \dots, n\}} |x_i|$ pro $x \in \mathbb{R}^n$ a podobně pro $\mathbb{R}^m$, $\mathbb{R}^{n+m}$ atd.
Výhodou této volby je následující odhad:

$$\forall A \in \mathbb{R}^{M^2}, \forall z \in \mathbb{R}^M: \|Az\|_\infty \leq M \|A\|_\infty \|z\|_\infty$$

$$\forall A, B \in \mathbb{R}^{M^2}: \|AB\|_\infty \leq M \|A\|_\infty \|B\|_\infty$$

2) Značení: $$D_1 F = \left(\partial_{x_i} F_j\right)_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,m}} \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

$$D_2 F = \left(\partial_{y_i} F_j\right)_{ij=1,\dots,m} \in \mathbb{R}^{m\times m}$$

$\forall x \in \mathbb{R}^n$: $\Phi_x(y) := y - (D_2F)^{-1}(\tilde{x},\tilde{y})\, F(x,y)$ pro každé $y \in \mathbb{R}^m$, pro které má pravá strana smysl.

3) Idea: Pro $x$ blízko $\tilde{x}$ je $\Phi_x$ kontrakce na jisté ~~okolí~~ množině obsahující bod $\tilde{y}$. Tedy podle Věty o kontrakci v této množině ex. jednoznačně určený pevný bod $\Phi_x$, označme ho $y_x$. Pak platí $y_x = y_x - (D_2F)^{-1}(\tilde{x},\tilde{y})\, F(x,y_x) \Rightarrow F(x,y_x) = 0$.

4) Volba okolí $\tilde{x}$ a $\tilde{y}$.
Fixujme $\Delta > 0$, aby $\overline{U_\Delta(\tilde{x})} \times \overline{U_\Delta(\tilde{y})} \subset G$ (okolí vzhledem k $\|\cdot\|_\infty$)

Pro $y^1, y^2 \in \overline{U_\delta(\tilde{y})}$, $\delta \in (0,\Delta)$ platí $\|(\Phi_x(y^1) - \Phi_x(y^2))_i\|_\infty \le M \|(\Phi_x)_i'(\xi)\|_\infty \|y^1 - y^2\|_\infty$

pro $i \in \{1,\dots,m\}$ a jisté $\xi \in [y^1, y^2]$, viz [MA3, V12.13]

a tedy $$\|\Phi_x(y^1) - \Phi_x(y^2)\|_\infty \le M \sup_{\xi \in U_\delta(\tilde{y})} \|\Phi_x'(\xi)\|_\infty \|y^1 - y^2\|_\infty .$$

$$\Phi_x'(\xi) = I - (D_2F)^{-1}(\tilde{x},\tilde{y})\, D_2F(x,\xi) \qquad \text{[MA3, Důsl 12.12]}$$

Protože $F \in C^1(G)$, ex. $\delta \in (0,\Delta)$ takové, že $\forall x \in \overline{U_\delta(\tilde{x})}$, $\forall \xi \in \overline{U_\delta(\tilde{y})}$: $\|\Phi_x'(\xi)\| < \frac{1}{2M}$ a tedy $\sup_{\xi \in U_\delta(\tilde{y})} \|\Phi_x'(\xi)\|_\infty \le \frac{1}{2M}$

(*) a $\forall x \in \overline{U_\delta(\tilde{x})}, \forall y^1, y^2 \in \overline{U_\delta(\tilde{y})}$: $\|\Phi_x(y^1) - \Phi_x(y^2)\|_\infty \le \frac{1}{2}\|y^1 - y^2\|_\infty$

Zbývá ukázat, že $\phi_x(\overline{U_\delta(\tilde{y})}) \subset \overline{U_\delta(\tilde{y})}$. To obecně neplatí pro všechna $x \in U_\delta(\tilde{x})$. Proto okolí bude potřeba zmenšit.
(**)
Chceme, aby $\forall y \in \overline{U_\delta(\tilde{y})} : \|\phi_x(y) - \tilde{y}\|_\infty = \|\phi_x(y) - \phi_{\tilde{x}}(\tilde{y})\|_\infty < \delta$

Platí $$\|\phi_x(y) - \phi_{\tilde{x}}(\tilde{y})\|_\infty \leq \|\phi_x(y) - \phi_x(\tilde{y})\|_\infty + \|\phi_x(\tilde{y}) - \phi_{\tilde{x}}(\tilde{y})\|_\infty$$

$$\leq \frac{\delta}{2} + \|\phi_x(\tilde{y}) - \phi_{\tilde{x}}(\tilde{y})\|_\infty \text{ podle } (*).$$

Ze spojitosti $F$ v bodě $[\tilde{x}, \tilde{y}]$ ex. $\varepsilon \in (0, \delta) : \forall x \in \overline{U_\varepsilon(\tilde{x})}$ platí

$$\|\phi_x(\tilde{y}) - \phi_{\tilde{x}}(\tilde{y})\|_\infty < \frac{\delta}{2}.$$

Dohromady je $\forall x \in \overline{U_\varepsilon(\tilde{x})}$, $\phi_x$ kontrakce na $\overline{U_\delta(\tilde{y})}$ a ~~podle~~ protože $\overline{U_\delta(\tilde{y})}$ je úplný metrický prostor, plyne z Věty o kontrakci existence jednoznačně určeného pevného bodu $\phi_x$. Bod $y \in \overline{U_\delta(\tilde{y})}$ je pevným bodem $\phi_x$ právě, když platí $F(x, y) = 0$ a tedy ex. jednoznačné řešení $y \in \overline{U_\delta(\tilde{y})}$ rovnice $F(x, y) = 0$ v $\overline{U_\delta(\tilde{y})}$. (Pro pevné $x \in \overline{U_\varepsilon(\tilde{x})}$)
Konečně, z (**) plyne, že $y \in U_\delta(\tilde{y})$.

5) Spojitost $\varphi$.

- Spojitost v bodě $\tilde{x}$. Ověříme pro $x \in U_\varepsilon(\tilde{x})$:

$$\|\varphi(\tilde{x}) - \varphi(x)\|_\infty = \|\phi_{\tilde{x}}(\tilde{y}) - \phi_x(y)\|_\infty \leq \|\phi_{\tilde{x}}(\tilde{y}) - \phi_x(\tilde{y})\|_\infty + \|\phi_x(\tilde{y}) - \phi_x(y)\|_\infty \overset{(*)}{\leq} \|\phi_{\tilde{x}}(\tilde{y}) - \phi_x(\tilde{y})\|_\infty + \frac{1}{2}\|\underbrace{\varphi(\tilde{x})}_{=\tilde{y}} - \underbrace{\varphi(x)}_{=y}\|_\infty$$

Protože $\|\varphi(\tilde{x}) - \varphi(x)\|_\infty \leq \delta$ dostaneme

$$\|\varphi(\tilde{x}) - \varphi(x)\|_\infty \leq 2\|\phi_{\tilde{x}}(\tilde{y}) - \phi_x(\tilde{y})\|_\infty$$ a spojitost $\varphi$ v bodě $\tilde{x}$ plyne ze spojitosti $F$ v $[\tilde{x}, \tilde{y}]$.

• Spojitost $\varphi$ na okolí $\tilde{x}$. Uvědomíme si, že $\varepsilon$ a $\delta$ lze ve 4) možné volit tak, aby $\det D_2 F \neq 0$ na $\overline{U_\varepsilon(\tilde{x})} \times \overline{U_\delta(\tilde{y})}$. Je to možné, protože $F \in C^1(G)$ a det je polynom ve složkách matice a tedy závisí na složkách matice spojitě.

Po upravené volbě $\varepsilon$ a $\delta$ je možné v každém bodě $[\hat{x}, \varphi(\hat{x})] \in U_\varepsilon(\tilde{x}) \times U_\delta(\tilde{y})$ provést úvahu ze 4) a předchozím bodě 5). Z jednoznačnosti řešení ~~v $\overline{U_\varepsilon(\tilde{x})} \times \overline{U_\delta(\tilde{y})}$~~ pro pevné $x \in \overline{U_\varepsilon(\tilde{x})}$ rovnice $F(x,y)=0$ v $\overline{U_\delta(\tilde{y})}$ dostáváme spojitost $\varphi$ také v $\hat{x}$.

6) $\varphi \in C^1(U_\varepsilon(\tilde{x}))$ (Opět bude případně potřeba zmenšit $\varepsilon$)

• ukážeme, že ex. totální diferenciál $\varphi$

Je-li $x, x+h \in U_\varepsilon(\tilde{x})$, platí

$$0 = F(x+h, \varphi(x+h)) - F(x, \varphi(x)) = F(x+h, \varphi(x) + \varphi(x+h) - \varphi(x)) - F(x, \varphi(x))$$

$$= F(x+h, \varphi(x) + t(x,h)) - F(x, \varphi(x)),$$ kde jsme označili $t(x,h) = \varphi(x+h) - \varphi(x)$.

Fixujme $x \in U_\varepsilon(\tilde{x})$ a $h \in \mathbb{R}^n$ tak, aby $x+h \in U_\varepsilon(\tilde{x})$. Protože $F$ má totální diferenciál v bodě $[x, \varphi(x)]$ platí

$$F(x+h, \varphi(x)+t) - F(x, \varphi(x)) = D_1 F(x, \varphi(x))(h) + D_2 F(x, \varphi(x))(t) + ob(h,t),$$ kde $ob: \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m$ splňuje

(××) $$\lim_{(h,t) \to 0 \in \mathbb{R}^{n+m}} \frac{\|ob(h,t)\|_\infty}{\max(\|h\|_\infty, \|t\|_\infty)} = 0,$$ pozn.: $\|(h,t)\|_\infty = \max(\|h\|_\infty, \|t\|_\infty)$.

Protože je $\varphi$ spojitá v $x$, ex. $\varepsilon_1 > 0$, že $\forall h \in \mathbb{R}^n$, $\|h\|_\infty < \varepsilon_1$ platí $x + h \in U_\varepsilon(\tilde{x})$ a tedy je možné takový bod dosadit do předchozí rovnosti ($t = \varphi(x+h) - \varphi(x)$, $h \in U_{\varepsilon_1}(0)$ )

Protože $\varphi$ řeší $F(x, \varphi(x)) = 0$ na $U_\varepsilon(\tilde{x})$, je

$$0 = D_1 F(x, \varphi(x))(h) + D_2 F(x, \varphi(x))(t) + ob(h, t)$$

Opět předpokládáme, že $\det(D_2 F) \neq 0$ na $\overline{U_\varepsilon(\tilde{x})} \times \overline{U_\delta(\tilde{y})}$ a aplikujeme na předchozí rovnost $(D_2 F)^{-1}$ zleva

$$(X) \quad 0 = \underbrace{(D_2 F)^{-1} D_1}_{(x, \varphi(x))} F(x, \varphi(x))(h) + \varphi(x+h) - \varphi(x) + (D_2 F)^{-1}(x, \varphi(x))\, \underbrace{ob}_{(h, \varphi(x+h) - \varphi(x))}$$

Vidíme, že $(D_2 F)^{-1}(x, \varphi(x)) D_1 F(x, \varphi(x))$ je kandidátem na totální diferenciál $\varphi$ v bodě $x$. Proto stačí ukázat odhad

$$\lim_{h \to 0 \in \mathbb{R}^n} \frac{\|\cancel{\det}(D_2 F)^{-1}(x, \varphi(x))\, ob(h, \varphi(x+h) - \varphi(x))\|_\infty}{\|h\|_\infty} = 0$$

Protože je $(D_2 F^{-1})(x, \varphi(x))$ regulární matice, nemá na nulovost limity vliv. Stačí tedy

$$(XX) \quad \lim_{h \to 0 \in \mathbb{R}^n} \frac{\|ob(h, \varphi(x+h) - \varphi(x))\|_\infty}{\|h\|_\infty} .$$

- Ukážeme, že ex. $C_0 > 1$, $\varepsilon_2 > 0$ takové, že $\forall h \in \mathbb{R}^n$, $\|h\|_\infty < \varepsilon_2$ platí $\|\varphi(x+h) - \varphi(x)\|_\infty \leq C_0 \|h\|_\infty$. $(XXX)$

Odhadujeme $(X)$: $\|\varphi(x+h) - \varphi(x)\|_\infty \leq C_1 \left(\|h\|_\infty + \|ob(h, \varphi(x+h) - \varphi(x))\|_\infty\right)$, pro $h \in U_{\varepsilon_1}(0)$

kde jsme označili $C_1 := m\|(D_2F)^{-1}(x,\varphi(x))\|_\infty + mn\|(D_2F)^{-1}(x,\varphi(x))\|_\infty$

$\cdot \|D_1F(x,\varphi(x))\|_\infty$

Ze (X X) plyne ex. $\varepsilon_3 > 0$ $\forall h \in U_{\varepsilon_3}(0), t \in U_{\varepsilon_3}(0)$:

$\phantom{xxxxxxxxxxxxxxxxxxxx} \in \mathbb{R}^n \phantom{xxxxxxxx} \in \mathbb{R}^m$

$$\|ob(h,t)\|_\infty \le \frac{1}{2C_1}\max(\|h\|_\infty, \|t\|_\infty) \le \frac{1}{2C_1}(\|h\|_\infty + \|t\|_\infty)$$

Ze spojitosti $\varphi$ v $x$ ex. $\varepsilon_4 > 0$ $\forall h \in U_{\varepsilon_4}(0): \|\varphi(x+h)-\varphi(x)\|_\infty < \varepsilon_3$

$\varepsilon_4 < \min(\varepsilon_3, \varepsilon_1)$

Dosazení do $\binom{XX}{X}$ dá pro $h \in U_{\varepsilon_4}(0)$, $t = \varphi(x+h)-\varphi(x)$

$$\|\varphi(x+h)-\varphi(x)\|_\infty \le C_1\|h\|_\infty + \frac{1}{2}\|\varphi(x+h)-\varphi(x)\|_\infty$$

Stačí tedy volit $C_0 := 2C_1+1$, $\varepsilon_2 := \varepsilon_4$.

Konečně:
$$\frac{\|ob(h,\varphi(x+h)-\varphi(x))\|_\infty}{\|h\|_\infty} \le \frac{\|ob(h,\varphi(x+h)-\varphi(x))\|_\infty}{\frac{1}{2}\|h\|_\infty + \frac{1}{2C_0}\|\varphi(x+h)-\varphi(x)\|_\infty}$$

$$\le \frac{\|ob(h \ldots)\|_\infty}{\frac{1}{2C_0}(\|h\|_\infty + \|\varphi(x+h)-\varphi(x)\|_\infty)} \le \frac{2C_0\|ob(\ldots)\|_\infty}{\max(\|h\|_\infty, \|\varphi(x+h)-\varphi(x)\|_\infty)}$$

Z (XX) a spojitosti $\varphi$ plyne $\begin{pmatrix} X & X \\ X & X \end{pmatrix}$. Pozn. Vnitřní fce

$$h \longrightarrow (h, \varphi(x+h)-\varphi(x)) \text{ je pro } h \neq 0 \text{ nenulová!}$$

Totální diferenciál $\varphi$ v $x$ je tedy $[(D_2F)^{-1}D_1F](x,\varphi(x))$. Parciální derivace jsou složky této matice. Pro důkaz $\varphi \in C^1(U_\varepsilon(\tilde{x}))$ stačí ukázat, že, je-li $A: U_\varepsilon(x) \to \mathbb{R}^{m\times m}$ spojitá a $\det A \neq 0$ na $U_\varepsilon(x)$, je také $A^{-1}: U_\varepsilon(x) \to \mathbb{R}^{m\times m}$ spojitá!

Spojitost zobrazení $A^{-1}$ je ekvivalentní spojitosti složek $A^{-1}$.

$$(A^{-1})_{ij} = \frac{(-1)^{i+j} \det M_{ji}}{\det A}$$ , kde $M_{ji}$ je matice vzniklá z $A$ $(\circ)$

vynecháním $j$-tého řádku a $i$-tého sloupce.

Spojitost $(A^{-1})_{ij}$ plyne z aritmetiky spojitosti a předpokladů.
(det je polynom složek matice)

Tedy $\varphi \in C^1(U_\varepsilon(\tilde{x}))$

2) $\varphi \in C^p(U_\varepsilon(\tilde{x}))$

Stačí ukázat, že $(D_2F)^{-1}(D_1F)(x,\varphi(x))_{ij} \in C^{p-1}(U_\varepsilon(\tilde{x}))$ pro $i \in \{1,\dots,m\}$, $j \in \{1,\dots,n\}$

patří do $C^p(U_\varepsilon(\tilde{x}))$. Víme $D_1F \in C^{p-1}(U_\varepsilon(\tilde{x}) \times U_\delta(\tilde{y}))$.

Ukážeme $(D_2F)^{-1} \in C^{p-1}(U_\varepsilon(\tilde{x}) \times U_\delta(\tilde{y}))$. To plyne z $(\circ)$,

vlastností det.

Konečně ukážeme indukcí podle výšky multiindexu, že

$\varphi \in C^p(U_\varepsilon(\tilde{x}))$. Víme $\varphi \in C^1(U_\varepsilon(\tilde{x}))$. Ať $\varphi \in C^q(U_\varepsilon(\tilde{x}))$, $q < p$.

~~$\alpha \in (\mathbb{N}_0)^n$, $i \in \{1,\dots,n\}$, $|\alpha| = q+1$, $\alpha_i > 0$. Tedy~~

~~$\alpha = \beta + e_i$ ; $\beta = \alpha - e_i$ ; $|\beta| = q-2$. Pro $k \in \{1,\dots,m\}$~~

~~platí $D^\alpha \varphi_k = D^\beta \partial_i \varphi_k = D^\beta$~~

Pro $k \in \{1,\dots,m\}$, $l \in \{1,\dots,n\}$ platí

$$\partial_l \varphi_k(x) = (\underbrace{D_2F}_{C^{p-1}})^{-1}(x,\underbrace{\varphi(x)}_{C^q})(\underbrace{D_1F}_{C^{p-1}}(x,\underbrace{\varphi(x)}_{C^q}))_{kl} \in C^q(U_\varepsilon(\tilde{x}))$$

$$\Rightarrow \varphi \in C^{q+1}(U_\varepsilon(\tilde{x}))$$ $\perp$