

Limity funkcí

12. cvičení

Spočítejte následující limity:

$$1. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 1}, \quad 2. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}, \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - x - 2)^{20}}{(x^3 - 12x + 16)^{10}}, \quad 4. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{[x]},$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} x \left[\frac{1}{x} \right], \quad 6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{1-x}}, \quad 7. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + \dots + x^n - n}{x - 1}.$$

8. Dokažte, že (pro $a \in \mathbb{R}$)

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a+} f(x) = A \text{ a } \lim_{x \rightarrow a-} f(x) = A.$$

Modifikujte tvrzení pro $a = \pm\infty$.

9. Limes superior a limes inferior pro funkce je definován jako

$$\liminf_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{\delta \rightarrow 0+} \inf f(P(a, \delta)) \text{ a } \limsup_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{\delta \rightarrow 0+} \sup f(P(a, \delta)).$$

Dokažte, že

$$\liminf_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) \geq \liminf_{x \rightarrow a} f(x) + \liminf_{x \rightarrow a} g(x)$$

a

$$\limsup_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) \leq \limsup_{x \rightarrow a} f(x) + \limsup_{x \rightarrow a} g(x).$$

mají-li pravé strany smysl.

10. Dokažte, že

$$\text{Existuje } \lim_{x \rightarrow a} f(x) \Leftrightarrow \liminf_{x \rightarrow a} f(x) = \limsup_{x \rightarrow a} f(x).$$