13. cvičení

Považujte za známé následující limity :

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}.$$

Spočtěte následující limity:

$$1.\ \lim_{x\to 1}\frac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1},\quad 2.\ \lim_{x\to 2}\Big(\frac{1}{x(x-2)^2}-\frac{1}{x^2-3x+2}\Big),$$

$$3.\ \lim_{x\to 0}\frac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}\ \text{pro } m,n\in\mathbf{N},\quad 4.\ \lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+2^x)}{x},$$

$$5.\ \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}},\quad 6.\ \lim_{x\to -2}\frac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}.$$

7. Nechť $f,g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ jsou funkce. Rozhodněte o platnosti následujících implikací.

$A)$ f,g jsou omezené $\Rightarrow f\cdot g$ je omezená.

$B)$ f,g jsou shora omezené $\Rightarrow f\cdot g$ je shora omezená.

$C)$ f,g jsou rostoucí $\Rightarrow f\cdot g$ je rostoucí.

8. Dokažte, že Riemannova funkce

$$D(x)=\begin{cases}\frac{1}{q} & \text{pro } x\in\mathbf{Q},\ x=\frac{p}{q} \text{ pro } p\in\mathbf{Z},\ q\in\mathbf{N} \text{ nesoudělná}\\ 0 & \text{pro } x\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}\end{cases}$$

je spojitá na $\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$.

9. Dokažte si větu, že jedna děleno "kladná nula" je ∞. Nechť $\lim_{x\to a} g(x)=0$ a existuje $\delta>0$ tak, že $g(x)>0$ na $P(a,\delta)$. Pak $\lim_{x\to a}\frac{1}{g(x)}=\infty$.