Derivace, průběh funkce a Taylorův polynom

18. cvičení - Derivace funkce

Zderivujte následující funkce a určete definiční obor derivace:

1. $x^2 e^{-x^2}$, 2. $\log\big(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\big)$, 3. $f(x) = x^2 \sin\big(\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\big)$ pro $x \neq 0$ a $f(0) = 0$,

4. $\log(\log \sin x)$, 5. $x^{\log x}$, 6. $\arccos(1-x^2)$, 7. x^{x^x}.

8. Pro funkci $f(x) = \arcsin x - \arccos(\sqrt{1-x^2})$ dokažte, že $f(0) = 0$ a spočtěte $f'_+(0)$ a $f'_-(0)$.

9. Dokažte, že $\arctan x + \arctan \dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2} \operatorname{sgn} x$ pro $x \neq 0$.

10. Dokažte, že $\arctan x = \arcsin \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

11. Nechť $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení (tedy sestrojte protipříklad, nebo to dokažte či odkažte na větu z přednášky):

$$(i)\ \exists f'(0) \in \mathbf{R} \Rightarrow f \text{ je v 0 spojitá.}$$

$$(ii)\ \exists f'(0) \in \mathbf{R}^* \Rightarrow f \text{ je v 0 spojitá.}$$

$$(iii)\ f \text{ je v 0 spojitá} \Rightarrow \exists f'(0) \in \mathbf{R}^*.$$

12. Sestrojte funkci $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tak, že $f'(x)$ existuje vlastní pro všechna $x \in \mathbf{R}$, ale funkce f' není spojitá v 0.