

21. cvičení - Průběh funkce 1

Vyšetřete průběhy těchto funkcí:

$$1. |x| + \arctan(|x - 1|), \quad 2. \frac{x^3}{\sqrt{|x^4 - 1|}}, \quad 3. |(1 - x^2)e^{-x}|.$$

Řešení příkladů lze nalézt na

https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/1213_analyza/PrubFR.pdf

4. Dokažte (například vyšetřením vhodného průběhu funkce), že platí:

$$e^x \geq 1 + x \quad \text{pro všechna } x \in \mathbf{R},$$

$$\sin x \leq x \quad \text{pro všechna } x \in [0, \infty),$$

$$\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2} \quad \text{pro všechna } x \in \mathbf{R},$$

$$\sin x + \tan x > x \quad \text{pro všechna } x \in (0, \frac{\pi}{2}).$$

5. Dokažte, že pro všechna $x, y \in \mathbf{R}$ platí

$$|\sin x - \sin y| \leq |x - y| \text{ a } |\arctan x - \arctan y| \leq |x - y|.$$

6. Dokažte, že funkce je konvexní na intervalu I , právě tehdy, když

$$\forall x, y \in I, \forall \alpha \in (0, 1) : f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y).$$

Grafy funkcí v programu Mathematica.