

### 5. cvičení - Aritmetika limit posloupností

Spočtěte následující limity podle definice:

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad 2. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}, \quad 3. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\log n}.$$

Za užití věty o aritmetice limit spočtěte následující limity:

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n}{2n^2 - 7}, \quad 2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^5 + 3n - 2}{n^5 - 3n^3 + 1}, \quad 3. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + n - 3}{n^3 - 1},$$

$$4. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n}, \quad 5. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1 + 2 + \dots + n}{n + 2} - \frac{n}{2} \right), \quad 6. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{n^3}$$

$$7. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + a + \dots + a^n}{1 + b + \dots + b^n} \text{ pro } |a| < 1 \text{ a } |b| < 1, \quad 8. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n + 4)^{100} - (n + 3)^{100}}{(n + 2)^{100} - n^{100}}.$$

9. Nechť  $a_n$  je zadaná posloupnost a  $a \in \mathbf{R}$ . Dokažte ekvivalenci následujících výroků:

$$A) \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbf{N} \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \varepsilon;$$

$$B) \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbf{N} \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < 2\varepsilon.$$