7. cvičení - Rozdíly odmocnin

Spočtěte následující limity:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \sin(\frac{n\pi}{4})$, 2. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n^2+n}-n$, 3. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}$, 4. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2+2^n+3^n}$,

5. $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$, 6. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[3]{n^3+1}-\sqrt[2]{n^2+1}$, 7. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$.

8. Nechť a_n a b_n jsou dvě posloupnosti takové, že existují $\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbf{R}$ a $\lim_{n\to\infty} b_n = B \in \mathbf{R}$. Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení:
A) $A \leq B \Rightarrow \exists n_0\ \forall n \geq n_0 : a_n \leq b_n$,
B) $a_n < b_n \Rightarrow A < B$.

9. Pro každé $A \in [0,\infty]$ sestrojte posloupnosti $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ a $\{b_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ tak, že

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0, \ \lim_{n\to\infty} b_n = \infty \text{ a } \lim_{n\to\infty} a_n b_n = A.$$

10*. Dokažte Stolzovu větu (diskrétní analogie l'Hospitalova pravidla). Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel a $\{b_n\}$ je rostoucí posloupnost splňující $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$. Nechť $A \in \mathbf{R}^*$ a platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = A.$$

Pak platí $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = A$.