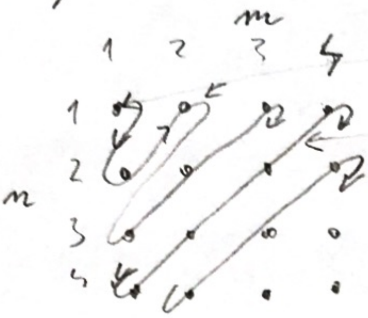
$\mathbb{N}^2 \preceq \mathbb{N}$

Dk: Stačí najít prosté zobrazení $\varphi : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$

Idea:



pořadové číslo $1, 3, 6, \dots, \frac{m(m+1)}{2}$,

na diagonále je konstantní součet $m+n$

Buď $(x,y) \in \mathbb{N}^2$.

- číslo $(x+y-1, 1)$ leží na stejné diagonále a má pořadové číslo $\frac{(x+y-1)(x+y)}{2}$
- pořadové číslo (x,y) spočtu jako $\frac{(x+y-1)(x+y)}{2} - (x+y-1) + x$

Hypotéza: Hledané zobrazení je $\varphi : (x,y) \longmapsto \frac{(x+y-1)(x+y-2)}{2} + x$.

Tvrzení: Toto zobrazení je prosté

ať $N = \varphi(x,y)$

Dk: Ať $N \in \varphi(\mathbb{N})$. Najdi $n \in \mathbb{N}$ t.ž.

$\frac{(n-2)(n-1)}{2} < N \leq \frac{(n-1)n}{2}$. Z konstrukce musí platit, že

$n = x+y$ a navíc $x = N - \frac{(n-1)(n-2)}{2}$

Proto je jednoznačné N dáno jednoznačně x i y. $\perp$.

ad 3*) Posloupnosti $\{a_j\}_{j=1}^{+\infty} \in P_{01}$ přiřadím množinu

$\{\underbrace{2^{2k} + \sum_{j=1}^{k} a_j 2^{j-1}}_{b_k :=} ; k \in \mathbb{N}\}$. Tvrzení: Zobrazení je prosté

Dk: $\sum_{j=1}^{k} 2^{j-1} = 2^k - 1 \Rightarrow \sum_{j=1}^{k} a_j 2^{j-1} \in \{0, 1, \dots, 2^k - 1\}$

$2^{2k} + 2^k = 2^k(2^k+1) \leq 2^k \cdot 2 \cdot 2^k = 2^{2k+1} < 2^{2k+2} = 2^{2(k+1)}$

$\Rightarrow 2^{2k} + \sum_{j=1}^{k} a_j 2^{j-1} \in [2^{2k}, 2^{2(k+1)})$ a tedy $b_k < b_{k+1}$; $k \in \mathbb{N}$.

ad 5 $\quad \varphi(\{a_j\}_{j=1}^{+\infty}) = \{b_j, j \in \mathbb{N}\}$ a platí $b_j < b_{j+1}$ pro $j \in \mathbb{N}$.

Chceme určit a_k, $k \in \mathbb{N}$. Víme $b_k = 2^{2k} + \sum_{j=1}^{k} a_j 2^{j-1}$

$b_k - 2^{2k} = \sum_{j=1}^{k} a_j 2^{j-1}$ je dvojkový zápis nějakého čísla z $\mathbb{N}_0$ $(\{0,1,\dots,2^k-1\})$

a z něho můžeme a_k a také $a_1, a_2, \dots, a_{k-1}$ $\perp$.

ad 2a) ~~Sjednocení konečné množiny je konečné. Viz skripta.~~

Zkonstruujeme prosté zobrazení do $\mathbb{N}$. Rozdělíme na 2 případy

a) množina konečná

b) množina nekonečná ale spočetná, tzn. $\approx \mathbb{N}$.

2b) M_j, $j \in \mathbb{N}$ spočetné množiny, tzn. ex. $\varphi_j : M_j \to \mathbb{N}$ prosté.

$x \in \bigcup M_j \Rightarrow \exists M_j, x \in M_j \Rightarrow$ def $i(x) = \inf\{j \in \mathbb{N}; M_j \ni x\}$ (existuje)

$$\varphi : \bigcup_{j=1}^{+\infty} M_j \longrightarrow \mathbb{N}^2$$

$$x \longrightarrow (i(x), \varphi_{i(x)}(x))$$

Tvrdíme, že φ je prosté. Ať $(i(x'), \varphi_{i(x')}(x')) = (i(x), \varphi_{i(x)}(x))$

$\Rightarrow i(x) = i(x')$ a $x' = x$ z prostoty $\varphi_{i(x)}$. $\perp$.

2c)

$$\psi(M) \xleftarrow{\psi} M \xrightarrow{\varphi} \overset{\text{prosté}}{\mathbb{N}}$$

Z inverze je potřeba axiom výběru, skripta p. 37

Další lemma: Množina $|M|$ je spočetná pokud $M \preceq \mathbb{N}$.

Ve zbylém případě, viz skripta 1.6.18