Zápočtová písemka z UPDR, var. 1, ZS 2022

(1) Mějme diferenciální rovnici $\partial_x^2 u - 2\partial_x\partial_y u + \partial_x u - \partial_y u = 0$. a) Určete typ rovnice. b) Převeďte rovnici na tvar, který neobsahuje smíšené druhé parciální derivace. c) Je-li to možné odstraňte z rovnice první derivace.

(2) Buď $u_0 \in C^\infty(\mathbb{R})$. Uvažme úlohu $x\partial_x u + (x+y)\partial_y u = 0$ pro neznámou funkci $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ s počáteční podmínkou $u(x,0) = u_0(x)$ pro $x \in \mathbb{R}$. a) Najděte řešení zadané úlohy na jistém okolí bodu $(1,0)$. b) Pro která u_0 existují C^1 řešení úlohy s počáteční podmínkou $u(x,0) = u_0(x)$ na jistém okolí bodu $(0,0)$?

(3) Uvažme úlohu $\partial_t u - \partial_x^2 u + u = 0$ v $(0,+\infty)\times(0,\pi)$ s okrajovou podmínkou $\partial_x u(t,0) = \partial_x u(t,\pi) = 0$ pro $t > 0$ a počáteční podmínkou $u(0,x) = u_0(x)$ pro $x \in (0,\pi)$ a dané u_0. a) Najděte kandidáta na řešení úlohy. b) Diskutujte konvergenci nalezené řady v čase $t = 0$. Za jakých podmínek na u_0 konverguje stejnoměrně? c) Najděte řešení úlohy pro $u_0(x) = \cos^2(x)$.

(1)

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}} \left|\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}\right. \sim \underset{D}{\begin{pmatrix} 1 & -\cancel{1} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}} \left|\underset{P^T}{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{matrix}}\right.$$

Vhodná transformace tedy je $u(x_1,x_2) = v(x_1, x_1+x_2)$. Pak

$$\partial_1 u(x_1,x_2) = \partial_1 v + \partial_2 v \qquad \partial_2 u = \partial_2 v$$

$$\partial_1^2 u = \partial_1^2 v + 2\partial_1\partial_2 v + \partial_2^2 v \qquad \partial_2^2 u = \partial_2^2 v$$

$$\partial_1\partial_2 u = \partial_1\partial_2 v + \partial_2^2 v \quad /\cdot(-2)$$

Tedy $\partial_1^2 u - \partial_1\partial_2 u + \partial_1 u - \partial_2 u = \partial_1^2 v + \cancel{2\partial_1\partial_2 v + \partial_2^2 v} -$

$- \cancel{2\partial_1\partial_2 v - 2\partial_2^2 v} + \partial_1 v + \partial_2 v - \partial_2 v = \underline{\partial_1^2 v - \partial_2^2 v + \partial_1 v}$ b)

Zavedeme $v(y_1,y_2) = w(y_1,y_2)\,e^{\alpha y_1}$

$$\partial_1 v(y_1,y_2) = (\partial_1 w + \alpha w)\,e^{\alpha y_1}$$

$$\partial_1^2 v(\dots) = (\partial_1^2 w + 2\alpha\partial_1 w + \alpha^2 w)\,e^{\alpha y_1}$$

$$\to e^{\alpha y_1}\left(\partial_1^2 w + \underline{2\alpha\partial_1 w} + \alpha^2 w - \partial_2^2 w + \underline{\partial_1 w} + \alpha w\right)$$

Zvolím $\alpha = -\frac{1}{2}$: $\partial_1^2 w - \partial_2^2 w - \frac{1}{4} w = 0$ c)

Rovnice je hyperbolická a)

2) Charakteristický systém je

$x' = x$ $\qquad x(t) = Ce^{t}$, $y'(t) - y(t) = Ce^{t}$, IF: e^{-t}

$y' = x+y$ $\qquad (y(t)e^{-t})' = (Ct+D)' \Rightarrow y(t) = Cte^{t} + De^{t}$

Fix $(x,y) \in U((1,0),\varepsilon)$: Chci, aby charakteristika tímto bodem procházela v $t=0 \overset{\varepsilon<1}{\Rightarrow} C = x, D = y$

$x(t) = xe^{t}$

$y(t) = xte^{t} + ye^{t}$. Kdy je $y=0$? $0 = xt+y$, $t = -\frac{y}{x}$

$x(-\frac{y}{x}) = xe^{-\frac{y}{x}}$

$$\boxed{u(x,y) = \cancel{u(-\tfrac{y}{x})} = u(xe^{-\frac{y}{x}}, 0) = \underline{u_0(xe^{-y/x})}}$$ a)

~~b) Všechny charakteristiky konvergují pro $t \to -\infty$ do bodu $(0,0)$. Protože každým bodem nějaká charakteristika prochází, musí být řešení na $U((0,0),\varepsilon)$ konstantní.~~

~~Spočteme~~ $\|(x(t),y(t))\|_2^2 = (x^2 + x^2t^2 + 2xty + y^2)e^{2t}$

$(\|(x(t),y(t))\|_2^2)' = e^{2t}(2x^2 + 2x^2t^2 + 4xty + 2y^2 + 2x^2t + 2xy)$

$= e^{2t}(2x^2t^2 + 2x^2t + 2(x^2+y^2+xy)) \geq$

$+4xyt$

$e^{2t}(2x^2t^2$ ~~nechce se mi.~~

Final: charakteristika procházející $(x,0)$ v $t=0$: $x(t) = xe^{t}$, $y(t) = xte^{t}$

konstanta $\downarrow$ $u_0 = C$ na $U(0,R)$

$\|(x(t),y(t))\|_2^2 = x^2e^{2t}(1+t^2) = x^2 g(t)$; $g'(t) = e^{2t}(2t+2+2t^2) > 0 \quad \forall t$

Tedy $\|\ \|$ je rostoucí $\Rightarrow$ pokud $(x,0) \in U(0,R)$ platí tedy i pro $(x(t),y(t)) \in U(0,R)$ $\forall t<0$

Řešení hledáme ve tvaru

$$\sum_{k=0}^{+\infty} y_k(t)\cos(kx) = u(t,x)$$

$$\sum \underbrace{\left(y_k'(t) + k^2\, y_k(t) + y_k(t)\right)}_{=0 \quad \forall k \in \{0,\dots,+\infty\}} \cos(kx) = 0$$

$$y_k(t) = y_k\, e^{(1-k^2)t}$$

Kandidát: $\displaystyle u(t,x) = \sum_{k=0}^{+\infty} y_k\, e^{-(1+k^2)t} \cos kx$

s $\displaystyle y_0 = \frac{\int_0^{\pi} u_0}{\pi}$; $\displaystyle y_k = \frac{\int_0^{\pi} u_0(y)\cos ky\, dy}{\frac{\pi}{2}}$.

v $t=0$: $\displaystyle u(0,x) = \sum_{k=0}^{+\infty} y_k \cos kx$

- Je potřeba, aby u_0 šlo prodloužit spojitě na sudou 2π-per. fci a aby měla konečnou variaci $\Rightarrow$ $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} y_k \cos kx = u(0,x)$ konv. stejnoměrně na $\mathbb{R}$
  Jordan-Dirichletova věta

- $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$. Hledané řešení tedy je

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\left(e^{-t} + e^{-5t}\cos 2x\right)$$

$\hookrightarrow$ podmínka: $u_0 \in C([0,\pi]) \cap BV([0,\pi])$

Odůvodnění tvaru řešení

Obecný tvar řešení $u(t,x) = \sum_{k=0}^{+\infty} T_k(t) X_k(x)$ dosadíme do rce

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left(T_k' X_k - T_k X_k'' + T_k X_k\right) = 0$$

Chceme/hledáme $-X_k'' = \lambda_k X_k$ v $(0,\pi)$ a X_k je netriviální

(*) $X_k' = 0$ v $\{0,\pi\}$

To není možné pro $\lambda_k < 0$, protože $\lambda_k \|X_k\|_2^2 = -\int_0^{\pi} X_k'' X_k = \int_0^{\pi} |X_k'|^2$. Dále tedy $\lambda_k \geq 0$

$\lambda = 0$: $X(x) = 1$ (obecný tvar řešení * je $A + Bx$)

$\lambda > 0$: $X(x) = A\cos(\sqrt{\lambda}\, x) + B\sin(\sqrt{\lambda}\, x)$

$X'(x) = -A\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}\, x) + B\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}\, x)$

$X'(0) = B\sqrt{\lambda} \Rightarrow B = 0 \Rightarrow X'(\pi) = -A\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}\,\pi)$

a tedy $\sqrt{\lambda}\,\pi = k\pi$ pro nějaké $k \in \mathbb{Z}$ (ale stačí uvážit $\mathbb{N}$ ze symetrie, sudosti pro cos)

$\Rightarrow \lambda = k^2$

Hledaný systém $\{X_k\}_{k=0}^{+\infty}$, $\{\lambda_k\}_0^{+\infty}$ tedy je:

$\lambda_0 = 0$, $X_0(x) = 1$, tj. $X_0(x) = \cos(0x)$

$\lambda_k = k^2$; $X_k(x) = \cos(kx)$