ZÁPOČTOVÁ PÍSEMKA Z UPDR, ZS 2023

(1) Mějme diferenciální rovnici $3\partial_x^2 u + 4\partial_x\partial_y u + \partial_y^2 u = 0$. a) Určete typ rovnice. b) Převeďte rovnici na tvar, který neobsahuje smíšené druhé parciální derivace. c) Je-li to možné, napište obecné řešení.

(2) Buď $u_0 \in C^\infty(\mathbb{R})$. Uvažme úlohu $\frac{1}{x}\partial_x u(x,y) + (x^2+1)\partial_y u(x,y) = 0$ pro neznámou funkci $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ s počáteční podmínkou $u(1,y) = u_0(y)$ pro $x \in \mathbb{R}$. a) Najděte řešení zadané úlohy na jistém okolí bodu $(1,1)$.

(3) Uvažme úlohu $\partial_t^2 u - \partial_x^2 u = 0$ v $(0,+\infty) \times (0,2\pi)$ s okrajovými podmínkami $\partial_x u(t,0) = \partial_x u(t,2\pi)$ a $u(t,0) = u(t,2\pi)$ pro $t > 0$ a počátečními podmínkami $u(0,x) = 0$ a $\partial_t u(0,x) = u_1(x)$ pro $x \in (0,2\pi)$ a dané u_1. a) Najděte kandidáta na řešení úlohy. b) Najděte řešení úlohy pro $u_0(x) = \sin^2(x)$.

Zápočtový příklad ~ UPDR 2023

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 3 \end{array}\right)$$

Zadání: Převeďte rovnici
$$3\partial_x^2 u + 4\partial_x\partial_y u + \partial_y^2 u = 0$$
do tvaru, který neobsahuje ~~pouze~~ smíšené derivace. **Bonus:** Napište obecné řešení.

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{\sqrt3} & 0 \\ 0 & -1 & -\frac{2}{\sqrt3} & \sqrt3 \end{array}\right)$$

$$\xi = \frac{1}{\sqrt3}x, \quad \eta = -\frac{2}{\sqrt3}x + \sqrt3\, y$$

$$u(x,y) = v\left(\frac{1}{\sqrt3}x, -\frac{2}{\sqrt3}x + \sqrt3\, y\right)$$

$$\partial_x u(x,y) = \partial_1 v \frac{1}{\sqrt3} - \frac{2}{\sqrt3}\partial_2 v$$

$$\partial_y u(\ ) = \sqrt3\, \partial_2 v$$

$$\partial_x^2 u(\ ) = \partial_1^2 v \frac{1}{3} - \frac{4}{3}\partial_1\partial_2 v + \frac{4}{3}\partial_2^2 v \qquad /3$$

$$\partial_x\partial_y u = \partial_1\partial_2 v - \partial_2^2 v\, 2 \qquad /\cdot 4$$

$$\partial_y^2 u = 3\partial_2^2 v \qquad /1$$

$$\partial_1^2 v - \partial_2^2 v = 0$$

$$v(\xi,\eta) = \alpha(\xi+\eta) + \beta(\xi-\eta)$$

$$u(x,y) = \alpha\left(\frac{-1}{\sqrt3}x + \sqrt3\, y\right) + \beta\left(\sqrt3\, x - \sqrt3\, y\right) \checkmark$$

Zk: $3\left(-\frac{1}{\sqrt3}\right)^2 + 4\left(-\frac{1}{\sqrt3}\sqrt3\right) + (\sqrt3)^2 = 1 - 4 + 3 = 0$

$3(\sqrt3)^2 + 4(-3) + 3 = 9 - 12 + 3 = 0$

① Najděte řešení $\frac{1}{x}\partial_x u(x,y) + (x^2+1)\partial_y u(x,y) = 0$ na okolí bodu $(1,1)$.

Splňující podmínku $u(1,y) = u_0(y)$ pro j. danou fci u_0 na $\mathcal{U}(1)$.

Charakteristický systém: $x' = \frac{1}{x} \Rightarrow x x' = 1$; $(x^2)' = 2$

$y' = x^2 + 1$

$x^2 = 2t$ Volíme konstantu $= 0$

$x(t) = \sqrt{2t}$ uvažujeme $x > 0$

$y'(t) = 2t + 1$

$y(t) = t^2 + t + c$

Fix $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ blízko $(1,1)$.

Charakteristika bude bodem procházet v čase $x = \sqrt{2t}$, tj. $t = \frac{x^2}{2}$

Charakteristika, která prochází bodem (x,y): $y = \left(\frac{x^2}{2}\right)^2 + \frac{x^2}{2} + c$

$\Rightarrow c = y - \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}$

$x(t) = \sqrt{2t}$

$y(t) = t^2 + t + y - \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}$

Kdy protne $\{x = 1\}$? $t = \frac{1}{2}$

Kolik je tam y? $y(t) = \frac{3}{4} + y - \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}$

Hledané řešení tedy je $u(x,y) = u_0\left(\frac{3}{4} + y - \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right)$

Vyřešte rovnici: $\partial_t^2 u - \partial_x^2 u = 0$ v $(0,+\infty)\times(0,2\pi)$

s počáteční podmínkou: $u_0(x) = u(0,x)$

$u_1(x) = \partial_t u(0,x) \qquad x\in[0,\pi]$

a okrajovou podmínkou $u(t,0) = u(t,2\pi)$

$\partial_x u(t,0) = \partial_x u(t,2\pi)$

Separace proměnných: $u(t,x) = T(t)X(x)$

$$\frac{T''}{T} = \frac{X''}{X} = \lambda$$

Hledáme všechna řešení: $X'' - \lambda X = 0$ v $(0,2\pi)$

$X(0) = X(2\pi)$

$X'(0) = X'(2\pi)$

$$\lambda\int_0^{2\pi} X^2 = \int_0^{2\pi} X''X = -\int_0^{2\pi}|X'|^2 + \underbrace{[X'X]_0^{2\pi}}_{=0 \text{ z okrajových podmínek}}$$

$\Rightarrow \lambda \le 0$. Pokud $\lambda = 0 \Rightarrow X' = 0 \Rightarrow X(x) = c\in\mathbb{R}$ OK.

$$\boxed{\lambda_0 = 0 \quad X_0 = 1}$$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\lambda < 0$: $\lambda = -\mu^2$: $X(x) = \alpha\cos\mu x + \beta\sin(\mu x)$

// $\mu\in\mathbb{N}$

Podm.: $\alpha = \alpha\cos\mu 2\pi + \beta\sin(2\pi\mu)$

$\beta = -\alpha\sin(\mu 2\pi) + \beta\cos(2\pi\mu)$

$\det\begin{pmatrix}\cos\mu 2\pi - 1 & \sin 2\pi\mu \\ -\sin 2\pi\mu & \cos 2\pi\mu - 1\end{pmatrix} =$

$(\cos 2\pi\mu - 1)^2 + (\sin 2\pi\mu)^2 =$

$2 - 2\cos(2\pi\mu) \overset{?}{=} 0$

$\mu\in\mathbb{Z}$, ale nás zajímá pouze $\mu\in\mathbb{N}$, protože $\mu=0$ fce, $\mu<0$ je vyjádřitelné s $\mu>0$

$\alpha(1-\cos\mu 2\pi) = \beta\sin(2\pi\mu)$

$\beta(1-\cos\mu 2\pi) = -\alpha\sin(2\pi\mu)$

$\alpha(1-\cos\mu 2\pi)^2 = -\alpha\sin^2 2\pi\mu$

$(1-\cos\mu 2\pi)^2 = -\sin^2 2\pi\mu$

$1 - 2\cos 2\pi\mu + \cos^2 2\pi\mu = -\sin^2 2\pi\mu \to 2 = 2\cos 2\pi\mu \Rightarrow \mu\in\mathbb{N}$

$\lambda_k = -k^2 \qquad X_k(x) = \cos kx, \quad \tilde{X}_k(x) = \sin kx$

Dopočti T_k: $T_k(t) = \alpha_k\cos kt + \beta_k\sin kt$ pro $\alpha_k,\beta_k\in\mathbb{R}$ $\quad k\in\mathbb{N}$

$T_0(t) = \alpha_0 + \beta_0 t$

Obecné řešení je:

$$u(t,x) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} (\alpha_k \cos kt + \beta_k \sin kt) \cos kx + \gamma_0 t$$
$$\sum_{k=1}^{+\infty} (\gamma_k \cos kt + \delta_k \sin kt) \sin kx$$

$$u(0,x) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k \cos kx + \gamma_k \sin kx \qquad = u_0(x)$$

$$\partial_t u(0,x) = \gamma_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} k \beta_k \cos kx + k \delta_k \sin kx \qquad = u_1(x)$$

Tedy: $\alpha_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u_0 \quad \alpha_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u_0(y)\cos ky \, dy \quad \gamma_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u_0(y) \sin ky \, dy$

Podobně γ_0, $k\beta_k$, $k\delta_k$.

Speciální řešení pro $u_0 = 0$, $u_1(x) = \sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$

$\Rightarrow \gamma_0 = \frac{1}{2}$, $2 \cdot \beta_2 = -\frac{1}{2}$ ostatní koef. nulové

$$u(t,x) = \frac{1}{2} t - \frac{1}{4} \sin 2t \cos 2x$$

Pozn: Tvar řešení

$$u(t,x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (\alpha_k \cos kt + \beta_k \sin kt)(\gamma_k \cos kx + \delta_k \sin kx)$$ není

dostatečně obecný

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \cos kt \,(\alpha_k \gamma_k \cos kx + \alpha_k \delta_k \sin kx)$$
$$+ \sin kt \,(\beta_k \gamma_k \cos kx + \beta_k \delta_k \sin kx)$$

odpovídá případu pro u

odpovídá případu pro $\partial_t u$

$\Rightarrow$ koeficienty $\alpha_k \gamma_k, \alpha_k \delta_k, \beta_k \gamma_k, \beta_k \delta_k$ ~~jsou~~ mohou být nezávislé, přitom ale

$$\frac{\alpha_k \gamma_k}{\alpha_k \delta_k} = \frac{\beta_k \gamma_k}{\beta_k \delta_k} \quad \text{Spor!}$$