Univerzita Karlova Praha
Matematicko-fyzikální fakulta
Katedra matematické analýzy

Parciální diferenciální rovnice I
Klasická teorie

Učební text k přednášce NDIR044

Mirko Rokyta

mirko.rokyta@mff.cuni.cz

http://www.karlin.mff.cuni.cz/~rokyta/vyuka/

Verze textu ze dne 14. ledna 2011

Obsah

Kapitola 1

Úvod

1.1 Úvodní poznámky, značení

Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ otevřená množina, $u : \Omega \to \mathbb{R}$ reálná funkce. V tomto textu budeme používat následující značení, týkající se těch bodů $x \in \Omega$, ve kterých existují příslušné derivace vlastní:

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} \equiv u_{x_j} \equiv \partial_{x_j} u \qquad \text{parciální derivace } u \text{ dle proměnné } x_j \,,$$

$$\nabla u \equiv Du := \Big(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_d}\Big) \qquad \text{gradient } u \,.$$

Formálně lze psát

$$\nabla := \Big(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_d}\Big) \qquad \text{operátor „nabla“},$$

symbol „∇“ lze tedy chápat jako zobrazení, které diferencovatelné funkci u přiřadí vektorovou funkci ∇u.

Pro vektorovou[1] funkci $\mathbf{f} : G \subset R^m \to \mathbb{R}^s$, G otevřená množina, $\mathbf{f} := \big(f_1, \dots, f_s\big)^T$, $f_j : G \to \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, d$, značíme (opět v bodech $x \in G$, ve kterých existují příslušné derivace vlastní)

$$\nabla \mathbf{f} := \big(\nabla f_1, \dots, \nabla f_s\big)^T \,,$$

tedy „gradient vektorové funkce uvažujeme po složkách“. Symbolem $(\dots)^T$ zde jako obvykle označujeme transponovaný (tj. „sloupečkový“) vektor.

Pro $\mathbf{f} : G \subset R^m \to \mathbb{R}^s$, G otevřená množina, značíme dále (opět v bodech $x \in G$, ve

[1] Vektorovou funkci budeme někdy též značit polotučně, $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_s)^T$, nebo pomocí symbolu vektoru, $\vec{f} = (f_1, \dots, f_s)^T$, často však budeme symbol vektoru vynechávat, bude-li situace jasná z kontextu.

kterých existují příslušné derivace vlastní)

$$\operatorname{div} \mathbf{f} := \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f_j}{\partial x_j} \equiv \nabla \cdot \mathbf{f}\,, \qquad \text{operátor „divergece“.}$$

Poznámka 1.1.1 Pro $\mathbf{f} : G \subset R^m \to \mathbb{R}^m$ je potřeba rozlišovat mezi $\nabla\mathbf{f}$ (vektorový gradient) a $\nabla \cdot \mathbf{f}$ (divergence $\mathbf{f}$ chápaná jako formální skalární součin operátoru nabla a vektoru $\mathbf{f}$). Zatímco $\nabla\mathbf{f}$ je (Jacobiho) matice prvních derivací $\mathbf{f}$, rozměru $m \times m$, je $\operatorname{div} \mathbf{f} \equiv \nabla \cdot \mathbf{f}$ její stopa, tedy

$$\nabla \cdot \mathbf{f} = \operatorname{Tr}(\nabla\mathbf{f})\,.$$

Pro $u : \Omega \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, resp. $\mathbf{f} : G \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^s$ značíme (se stejnými konvencemi jako výše)

$$\Delta u := \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}\,, \qquad \Delta\mathbf{f} := \sum_{j=1}^{d} \left(\Delta f_1, \ldots, \Delta f_s\right)^T,$$

tzv. Laplaceův operátor.

Vektor tvaru $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$, kde $\alpha_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $j = 1, \ldots, m$, nazvu m-dimenzionálním multiindexem *výšky* (někdy též *řádu*)

$$|\alpha| := \alpha_1 + \cdots \alpha_m\,.$$

V literatuře (viz např. [2]) se pro výšku multiindexu používá téz značení $\sum \alpha$.

Pro multiindex $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ a funkci $u \in \mathcal{C}^{|\alpha|}(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ neprázdná oblast, definujeme *derivaci u dle multiindexu α*,

$$\mathrm{D}^\alpha u(x) := \frac{\partial^{|\alpha|} u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_m^{\alpha_m}}\,, \qquad x = (x_1, \ldots, x_d) \in \Omega\,. \tag{1.1}$$

Pro $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ zavádíme formální vektor (resp. množinu) všech parciálních derivací řádu k funkce $u \in \mathcal{C}^k(\Omega)$:

$$\mathrm{D}^{(k)} u(x) := \{\mathrm{D}^\alpha u(x);\, |\alpha| = k\}\,.$$

Pro $\mathbf{f} : G \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^s$ píšeme jako výše

$$\mathrm{D}^\alpha\mathbf{f} := \sum_{j=1}^{d} \left(\mathrm{D}^\alpha f_1, \ldots, Dif\alpha f_s\right)^T,$$

a podobně pro $\mathrm{D}^{(k)}\mathbf{f}$.

Cvičení 1.1.2 Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je neprázdná oblast, $x \in \Omega$. Ukažte, že platí

- Pro funkci $u \in \mathcal{C}^k(\Omega)$ je počet prvků $\mathrm{D}^{(k)}u(x)$ roven d^k.
- Pro funkci $u \in \mathcal{C}(\Omega)$ je $\mathrm{D}^{(0)}u(x) = u(x)$.
- Pro funkci $u \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ je $\mathrm{D}^{(1)}u(x) = \nabla u(x) = Du(x)$.
- Pro funkci $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ je $\mathrm{D}^{(2)}u(x) = H(u(x))$, kde $H(u)$ je tzv. Hessova matice druhých derivací funkce u v bodě x, $H(u) = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{i,j=1}^{d}$. Přesvědčte se dále, že v tomto značení je $\Delta u = \mathrm{Tr}\,(H(u))$.

Na otázku „co vlastně je parciální diferenciální rovnice“ lze odpovědět tak, že je to rovnice pro neznámou funkci u více než jedné proměnné, která obsahuje alespoň jednu její parciální derivaci. Matematická definice může vypadat například takto.

Definice 1.1.3 *Buď $n \in \mathbb{N}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ otevřená množina, $d \geq 2$.* Parciální diferenciální rovnicí *(dále PDR) pro neznámou funkci $u : \Omega \to \mathbb{R}$ nazvu výraz tvaru*

$$F\big(x, u(x), Du(x), \cdots, D^{(n-1)}u(x), D^{(n)}u(x)\big) = 0\,, \tag{1.2}$$

kde

$$F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \cdots \times \mathbb{R}^{d^{n-1}} \times \mathbb{R}^{d^n} \to \mathbb{R} \tag{1.3}$$

je daná funkce. Řád *rovnice* (1.2) *je roven řádu nejvyšší derivace u, která se vyskytuje v* (1.2)*.*

Poznámka 1.1.4 Bez újmy na obecnosti lze učinit úmluvu, že zápisem (1.2) budeme vyjadřovat skutečnost, že řád rovnice (1.2) je právě n.

Více než jednu rovnice pro více než jednu neznámou funkci nazýváme systémem PDR. Onu „více než jednu neznámou funkci“ lze také chápat jako jednu vektorovou funkci a podobně pro „více než jednu rovnici“. Definice systému PDR pak vypadá takto:

Definice 1.1.5 *Buď $n \in \mathbb{N}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ otevřená množina, $d \geq 2$.* Systémem s parciálních diferenciálních rovnic *pro neznámou vektorovou funkci $\mathbf{u} : \Omega \to \mathbb{R}^s$ nazvu výraz tvaru*

$$\mathbf{F}\big(x, \mathbf{u}(x), D\mathbf{u}(x), \cdots, D^{(n-1)}\mathbf{u}(x), D^{(n)}\mathbf{u}(x)\big) = 0\,, \tag{1.4}$$

kde

$$\mathbf{F} : \Omega \times \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^{sd} \times \cdots \times \mathbb{R}^{sd^{n-1}} \times \mathbb{R}^{sd^n} \to \mathbb{R}^s \tag{1.5}$$

je daná funkce. Řád *systému* (1.4) *je roven řádu nejvyšší derivace* $\mathbf{u}$*, která se vyskytuje v* (1.4)*. Úmluvu z poznámky 1.1.4 budeme v dalším vztahovat i na pojem systému PDR.*

Nejčastěji se v teorii PDR vyskytují systémy, pro které $m = s$, tedy systémy, u kterých je počet rovnic roven počtu neznámých funkcí. Lze se však setkat i se systémy *přeurčenými* ($m > s$), případně *podurčenými* ($m < s$).

Poznámka 1.1.6 Často hraje ve vztahu (1.2), resp. vztazích (1.4) jedna z proměnných x_j význačnou roli, například tím, že nejvyšší parciální derivace u podle této proměnné jsou jiného řádu než je řád rovnice nebo se některé z těchto derivací v rovnici vyskytují „s jiným znaménkem“ než ostatní derivace. Většinou je v těchto případech také důležitá fyzikální interpretace rovnic (1.2), resp. (1.4), podle které taková významná proměnná často hraje roli „času“. V tomto případě je zvykem buď tuto proměnnou přeznačit symbolem t („čas“), tedy uvažovat buď například

$$u = u(x)\,, \quad \text{kde} \ \ x = (t, x_2, \ldots, x_d)\,, \ x \in \Omega\,,$$

(v tomto případě je pak Ω „časoprostorová oblast“), nebo počet stávajících proměnných funkce u rozšířit o jednu „časovou proměnnou t“

$$u = u(t,x)\,, \quad \text{kde} \ \ t \in (0,T)\,, T > 0\,, \quad x = (x_1, \ldots, x_d)\Omega\,.$$

I ve druhém ze zmíněných případů však někdy ztotožňujeme $t \equiv x_0$ a píšeme například

$$\begin{aligned} u = u(x)\,, \quad & \text{kde} & x = (x_0, x_1, \ldots, x_d)\,, \ x \in (0,T) \times \Omega\,, \ T > 0\,, \\ & \text{případně píšeme} & x = (x_0, \overline{x})\,, \ \overline{x} = (x_1, \ldots, x_d)\,. \end{aligned}$$

Posledně zmíněné označení použijeme v paragrafu 1.3.

Rovnicím, které neobsahují časovou proměnnou, říkáme *stacionární*, rovnicím „s časem“ říkáme *nestacionární* nebo *evoluční*.

Definice pojmu řešení (1.2) resp. (1.4) závisí vždy na tom, v jakém smyslu se chápou derivace, které se v (1.2) resp. (1.4) vyskytují. Z klasického pojetí vlastní derivace ve všech bodech $x \in \Omega$ vychází pojem tzv. *klasického řešení* (1.2) resp. (1.4).

Definice 1.1.7 Klasickým řešením (1.2) *resp.* (1.4) *v neprázdné oblasti* $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *nazveme funkci* $u : \Omega \to \mathbb{R}$ *resp.* $\mathbf{u} : \Omega \to \mathbb{R}^s$*, mající ve všech bodech* $x \in \Omega$ *vlastní všechny derivace, vyskytující se v* (1.2) *resp.* (1.4)*, a splňující* (1.2) *resp.* (1.4) *identicky v* Ω*.*

Poznámka 1.1.8

(i) Místo podmínky „mající ve všech bodech $x \in \Omega$ vlastní všechny derivace, vyskytující se v (1.2) resp. (1.4)“ používáme někdy jednodušší podmínku, požadující však od u více: $u \in \mathcal{C}^n(\Omega)$, kde n je řád (1.2) resp. (1.4).

(ii) Existují i jiná, obecnější pojetí pojmu řešení PDR, kři kterých se například některé derivace uvažují pouze ve skoro všech bodech, případně se uažují takzvané slabé derivace, derivace ve smyslu distribucí, atd. Tento učební text se však bude zabývat pouze klasickou teorií, vycházející z definice 1.1.7.

Někdy požadujeme, aby řešení u splňovalo kromě parciální diferenciální rovnice ještě takzvané *okrajové podmínky.* Myslí se tím například požadavek, aby se u rovnalo předem známé funkci, řekněme g, na neprázdné části hranice $\Gamma \subset \partial\Omega$. Okrajové podmínky mohou mít velké množství různých forem, od právě zmíněné, až po velmi komplikované vztahy, zahrnující nejen hodnoty u, ale i hodnoty derivací u, vždy však v principu jde o dodatečné požadavky, které na u klademe na jistých částech hranice oblasti Ω. V případě evoluční rovnice, kdy $u = u(t, x)$, a pokud

$$\Gamma \subset \{0\} \times \Omega \subset \partial\left((0, T) \times \Omega\right) ,$$

(podmínka je zadána „pro čas $t = 0$"), hovoříme o tzv. počáteční podmínce či počátečních podmínkách, je-li jich víc.

Jednomu řešení je možno předepsat více než jednu okrajovou resp. počáteční podmínku. Vzniká tedy přirozená otázka, jestli řešení PDR, splňující navíc všechny předepsané podmínky, vůbec existuje, kolik takových řešení je, případně jaké mají vlastnosti. S tím souvisí pojem tzv. *úlohy* (v kontextu PDR) a jejího korektního zadání. Ještě než tyto pojmy vyjasníme, uvedeme následující příklad.

Příklad 1.1.9 Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je neprázdná oblast. Hledejme $u = u(t, x, y) : (0, T) \times \Omega \to \mathbb{R}$, splňující

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x, y) - \Delta u(t, x, y) = \sin(xyt) , \qquad \text{pro } (t, x, y) \in (0, T) \times \Omega , \tag{1.6}$$

$$u(0, x, y) = 1 , \qquad \text{pro } (x, y) \in \Omega , \tag{1.7}$$

$$u(t, x, y) = t + 1 , \qquad \text{pro } (t, x, y) \in (0, T) \times \partial\Omega . \tag{1.8}$$

Jde o evoluční parciální diferenciální rovnici druhého řádu. Výjimečnost proměnné t spočívá jak v tom, že derivace u podle t je pouze prvního řádu, tak v tom, že prostorové derivace x_j, obsažené v Laplaceově operátoru, mají opačné znaménko než $\frac{\partial u}{\partial t}$.

Pracujeme v tzv. časoprostorovém válci $(0, T) \times \Omega$ s podstavou Ω. Rovnici (1.6) řešíme uvnitř tohoto válce, podmínka (1.7) je počáteční podmínka, zadaná na jeho podstavě, podmínka (1.8) je podmínka okrajová, zadaná na „boční" části pláště časoprostorového válce.

Intuitivně je jasné, že při definici řešení u celé tzv. *úlohy* (1.6)–(1.8) je potřeba také říci nejen jaké geometrické vlastnosti očekáváme od hranice $\partial((0, T) \times \Omega)$, ale především v jakém smyslu budou splněny podmínky (1.7), (1.8) — funkce u je totiž definována pouze na $(0, T) \times \Omega$, tj. *uvnitř* časoprostorového válce. Přesněji se těmto úvahám budeme věnovat při studiu konkrétních úloh, již teď však můžeme stručně říci, že pro klasické řešení většinou požadujeme, aby příslušné okrajové a počáteční podmínky byly splněny ve smyslu limity.

Poznámka 1.1.10 Uvedený příklad sloužil především k tomu, abychom snáze akceptovali následující úmluvu: V kontextu PDR rozumíme *úlohou* následující trojici:

(i) Rovnici tvaru (1.2) resp. systém tvaru (1.4) pro neznámou funkci u resp. $\mathbf{u}$.

(ii) Množinu, na které má být definováno řešení (1.2) resp. (1.4). Typicky půjde o oblast, tj. otevřenou souvislou množinu v $\mathbb{R}^m$.

(iii) Sadu okrajových a počátečních podmínek.

S pojmem úlohy také úzce souvisí termín data úlohy.

Poznámka 1.1.11 Úloha (1.6)–(1.8) má také následující fyzikální interpretaci: Pokud $u(t,x)$ představuje teplotu v bodě $x \in \Omega$ v čase $t \in (0,T)$, představuje (1.6) tzv. *rovnici vedení tepla*, se *zdroji tepla* $\sin(xyt)$. Podmínka (1.7) pak reprezentuje předepsané rozložení teploty v čase $t = 0$, podmínka (1.8) předepsané rozložení teploty „na stěnách místnosti“ Ω. Při přemýšlení o významu této interpretace můžeme dojít k podezření, že by úloha (1.6)–(1.8) mohla být korektně zadaná. Toto podezření samozřejmě musí potvrdit či vyvrátit důkaz příslušné matematické věty, kterou zformulujeme později.

V paragrafu 1.3 také ukážeme, jak lze rovnici vedení tepla na základě jistých fyzikálních úvah odvodit.

(i) Co to je úloha pro PDR: rovnice, oblast, data (= koeficienty, „pravá strana“, počáteční podmínky (pro evoluční rovnice podmínky pro $t = 0$) a okrajové podmínky (podmínky na $\partial\Omega$)). „Korektně zadaná úloha“ je, velmi vágně řečeno, taková, která má v dané třídě funkcí právě jedno řešení s rozumnými vlastnostmi.

(ii) Terminologie: rovnice lineární, kvazilineární (lineární vzhledem k nejvyšší derivaci), nelineární (není lineární), ryze nelineární (není lineární ani kvazilineární).

Příklad 1.1.12 Buď $u = u(t,x)$. Potom následující evoluční parciální diferenciální rovnice jsou:

- $\frac{\partial u}{\partial t} + x^2 \Delta u = 0$ lineární 2. řádu,
- $\frac{\partial u}{\partial t} + \left(u^2 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \Delta u = 0$ nelineární, a přitom kvazilineární, 2. řádu
- $\frac{\partial u}{\partial t} + (\Delta u)^2 = 0$ ryze nelineární, 2. řádu
- $\frac{\partial u}{\partial t} + \sum\limits_{j=1}^{d} a_j(x,t,u) \frac{\partial u}{\partial x_j} = f(x,t,u)$ nelineární, a přitom kvazilineární, 1. řádu.

1.2 Základní příklady PDR

a) Rovnice bilance (kontinuity) a její odvození metodou testovacích objemů.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho \vec{v}) = 0\,.$$

b) Rovnice vedení tepla a její odvození metodou testovacích objemů.

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u = f\,.$$

c) Rovnice minimální plochy a její odvození metodou testovacích funkcí.

$$\operatorname{div} \frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} = 0\,.$$

1.3 Cauchyova úloha pro kvazilineární PDR 1. řádu

Definice 1.3.1 *Buď $t \in (0,T)$, $T > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, a uvažujme kvazilineární parciální diferenciální rovnici prvního řádu pro funkci $u = u(t,x)$,*

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{j=1}^{d} a_j(t,x,u) \frac{\partial u}{\partial x_j} = f(t,x,u)\,, \qquad t \in (0,T)\,,\ \ x \in \mathbb{R}^d\,, \tag{1.9}$$

kde f, $a_j \in \mathcal{C}((0,T) \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R})$, j=1,…,d, jsou dané funkce. Řekneme, že $u : (0,T) \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ je klasickým řešením (1.9)*, pokud*

(i) $u \in \mathcal{C}^1((0,T) \times \mathbb{R}^d)$,

(ii) *u splňuje* (1.9) *ve všech bodech $(t,x) \in (0,T) \times \mathbb{R}^d$.*

Rovnici (1.9) *doplňujeme* počáteční podmínkou *tvaru*

$$u(0,x) = u_0(x)\,, \qquad x \in \mathbb{R}^d\,, \tag{1.10}$$

kde $u_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d)$ je daná funkce. Úloha (1.9)–(1.10) *se nazývá* Cauchyova úloha pro kvazilineární rovnici 1. řádu*. Řekneme, že $u : (0,T) \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ je* klasickým řešením Cauchyovy úlohy (1.9)–(1.10)*, pokud u je klasickým řešením* (1.9) *a navíc splňuje počáteční podmínku* (1.10) *v následujícím (klasickém) smyslu:*

$$\lim_{(t,y)\to(0+,x)} u(t,y) = u_0(x) \quad \textit{pro všechna } x \in \mathbb{R}^d\,. \tag{1.11}$$

Poznámka 1.3.2
- V podstatě lze (obecně) říci, že když mluvíme o *klasickém řešení*, máme nejčastěji na mysli tak hladkou funkci, aby všechny její v rovnici vystupující derivace byly spojité. Proto klasické řešení u rovnice (1.9) hledáme v prostoru $\mathcal{C}^1((0,T)\times\mathbb{R}^d)$. Podobně splnění počáteční podmínky „v klasickém smyslu“ znamená její splnění ve smyslu limity. Termín „Cauchyova úloha“ se v kontextu evolučních PDR používá tehdy, když oblastí, na které jsou definovány prostorové proměnné a tedy i počáteční podmínky, je celý prostor (tedy když $\Omega = \mathbb{R}^d$). Někdy se též používá termín *lokální Cauchyova úloha* pro situaci, kdy řešení Cauchyovy úlohy hledáme pouze na nějaké oblasti $G \subset (0,T)\times\mathbb{R}^d$.
- Rozmyslete si, že (1.11) je ekvivalentní následujícímu tvrzení: existuje spojité rozšíření funkce u na množinu $\langle 0,T)\times\mathbb{R}^d$ takové, že $u(0,x) = u_0(x)$ pro všechna $x \in \mathbb{R}^d$.

Značení 1.3.3 Pro zjednodušení zápisu je možné ztotožnit časovou proměnnou t s některou další složkou prostorové proměnné, například $t \equiv x_0$. Takto rozšířenou časoprostorovou proměnnou budeme pro pohodlí značit opět x, zatímco pro prostorovou proměnnou budeme v této situaci používat označení $\overline{x}$. Tedy $x = (x_0, \overline{x}) \in \mathbb{R}^d_T := (0,T)\times\mathbb{R}^d$, $\overline{x} = (x_1,\ldots,x_d)$. Dále položíme $a_0(x,u) := 1$. Pak (1.9) resp. (1.10) přejde v

$$\sum_{j=0}^{d} a_j(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_j} = f(x,u)\,, \qquad x \in \mathbb{R}^d_T\,, \tag{1.12}$$

resp.

$$u(x) = u_0(x) \quad \text{na množině } \{x \in \mathbb{R}^d_T;\, x_0 = 0\}\,. \tag{1.13}$$

Ve zbytku tohoto paragrafu budeme hledat řešení Cauchyovy úlohy (1.9)–(1.10) ve zjednodušeném tvaru (1.12)–(1.13). Budeme však mít na paměti, že pro (počáteční) podmínku tvaru (1.13) je nejpřirozenější interpretací proměnné x_0 právě „čas t“.

Poznámka 1.3.4 Na podmínku (1.13) lze nahlížet i tak, že hodnoty hledaného řešení jsou předem známy (resp. „předepsány“ na nadrovině $\{x \in \mathbb{R}^d_T;\, x_0 = 0\} \subset \mathbb{R}^d_T$. Při tomto pohledu může jednoho snadno napadnout, že by tato plocha „předepsaných hodnot“ nemusela nutně být „rovná“. Dojdeme tak ke zobecnění podmínky (1.16), a sice, že hledáme řešení rovnice (1.12) splňující navíc podmínku

$$u = u_0 \quad \text{na množině } \Gamma \subset \mathbb{R}^d_T\,, \tag{1.14}$$

kde Γ je nějaká (hladká) nadplocha dimenze d v $\mathbb{R}^d_T$. V dalším uvidíme (viz paragraf 2.3), že Γ nebude moci být zcela libovolná. Aby byla úloha (1.12), (1.14) řešitelná, nebude moci být Γ tzv. *charakteristickou plochou* rovnice (1.12). Až nastane správný čas, uvědomíme si tedy, že rovnice (1.12) si v jakémsi slova smyslu „sama řekne“, kde je možno předepsat jejímu řešení hodnoty a kde ne.

Budeme nyní hledat řešení úlohy (1.12)–(1.16) ve dvou krocích. Nejprve vyšetříme případ, kdy f na pravé straně rovnice (1.12) bude identicky nulová funkce a poté se budeme věnovat případu obecné f.

$\boxed{\text{Možnost I, } f \equiv 0.}$

V tomto případě přejde rovnice (1.12) v rovnici

$$\sum_{j=0}^{d} a_j(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_j} = 0\,, \qquad x \in \mathbb{R}^d_T := (0,T)\times\mathbb{R}^d\,, \tag{1.15}$$

s počáteční podmínkou

$$u(x) = u_0(x) \qquad \text{na množině } \{x \in \mathbb{R}^d_T;\, x_0 = 0\}\,. \tag{1.16}$$

Řešení úlohy (1.15)–(1.16) budeme hledat tzv. *metodou charakteristik.*[2] Vyslovme nejprve následující definici.

Definice 1.3.5 *Rovnici* (1.15) *přiřadíme* systém obyčejných diferenciálních rovnic *(zvaný též* charakteristický systém rovnice (1.15)*) pro neznámé funkce $x_j = x_j(s)$, $j = 0,\dots d$,*

$$\frac{d}{ds}x_j(s) = a_j\big(x(s), u(x(s))\big)\,, \quad s \in (\alpha,\beta) \subset \mathbb{R}\,, \tag{1.17}$$

kde a_j jsou funkce z (1.15)*. Každé klasické řešení $x : (\alpha,\beta) \to \mathbb{R}^d_T$ systému rovnic* (1.17) *nazvu* charakteristikou (charakteristickou křivkou) rovnice (1.15).

Poznámka 1.3.6

(a) Charakteristika je tedy křivka v $\mathbb{R}^d_T$, jejíž parametrizace je dána zobrazením $x : (\alpha,\beta) \to \mathbb{R}^d_T$. Vzhledem k tomu, že systém (1.17) je systém se spojitými pravými stranami a_j, existuje podle teorie ODR (viz [13]) řešení (1.17) alespoň lokálně v okolí každé počáteční (proto index p v (1.18)) podmínky typu

$$x(s_p) = x_p\,, \quad s_p \in (\alpha,\beta)\,, \quad x_p \in \mathbb{R}^d_T\,. \tag{1.18}$$

Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že $s_p = 0 \in (\alpha,\beta)$. Připomeňme, že pro pouze spojité a_j nemusí být řešení úlohy (1.17)–(1.18) určeno jednoznačně, k tomu je potřeba, aby a_j byly alespoň lokálně lipschitzovské funkce (podrobněji viz např. [13]).

(b) Přesněji řečeno, charakteristika $x(s)$ je křivka, přiřazená nejen rovnici (1.15) (prostřednictvím funkcí a_j), ale i funkci $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d \times (0,T))$. Obecně tedy nemusíme na u nahlížet jako na řešení rovnice (1.15), které ostatně teprve hledáme, ale jeko na libovolnou dostatečně hladkou funkci u, která spolu se známými koeficienty a_j definuje charakteristiky. Lépe vše osvětlíme za chvíli na příkladech.

[2] V paragrafu 2.3 rovněž uvidíme, že mezi charakteristickou plochou z předchozí poznámky a charakteristikou z následující definice bude skutečně souvislost.

Následující identita je pro metodu charakteristik klíčová. Studujme chování libovolné funkce $u \in \mathcal{C}^1((0,T) \times \mathbb{R}^d)$ na charakteristice $x(s)$, přiřazené rovnici (1.17) a této funkci u. Derivováním podle s dostaneme:

$$\frac{d}{ds}u(x(s)) = \sum_{j=0}^{d} \frac{\partial u}{\partial x_j}(x(s))\frac{d}{ds}x_j(s) \overset{(1.17)}{=} \sum_{j=0}^{d} a_j\big(x(s), u(x(s))\big)\frac{\partial u}{\partial x_j}(x(s)) . \qquad (1.19)$$

Je-li levá strana identity (1.19) rovna nule, znamená to, že funkce u je konstantní na charakteristice $x(s)$, nulovost pravé strany (1.19) pak znamená, že funkce u je klasickým řešením rovnice (1.15) v bodech, které leží na příslušné charakteristice.

Tato identita dokazuje následující lemma, jehož formulaci věnujte pozornost: zdánlivě jde o dvě implikace, které dohromady vytvoří ekvivalenci; výroky, tvořící implikace (a) a (b), se však poněkud liší.

Lemma 1.3.7 *Uvažujme funkci $u \in \mathcal{C}^1(\Omega_T)$, kde $\Omega_T \subset (0,T) \times \mathbb{R}^d$ je neprázdná oblast.*

(a) *Buď u konstantní na charakteristice $x(s)$, $s \in (\alpha, \beta)$, ležící v Ω_T, a přiřazené koeficientům $a_j(x,u)$ rovnice* (1.15) *a funkci u. Potom funkce u řeší v klasickém smyslu rovnici* (1.15) *v bodech charakteristiky $x(s)$, ležících v Ω_T.*

(b) *Nechť naopak u je klasické řešení rovnice* (1.15) *v oblasti Ω_T. Potom u je konstantní na libovolné charakteristice $x(s)$, ležící v oblasti Ω_T.*

Důkaz.

Důkaz obou implikací vychází z rovnosti (1.19) a diskuse za ní. □

Příklad 1.3.8 Rovnice $u_t + xu_x = 0$ s počáteční podmínkou u_0. Dostane se, že charakteristika, procházející bodem $[x_0, t_0]$, $x_0 \neq 0$, $t_0 > 0$, má rovnici $t = \ln|x| + (t_0 - \ln|x_0|)$, jde tedy o „logaritmický vějíř“, viz Obr. 1.1.

Na základě toho lze explicite vyjádřit řešení uvedené rovnice pro data $u_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, a sice $u(x,t) = u_0(xe^{-t})$. Například pro $u_0(x) = e^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$ dostaneme $u(x,t) = \exp(-x^2e^{-2t})$, $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$. Viz Obr. 1.2.

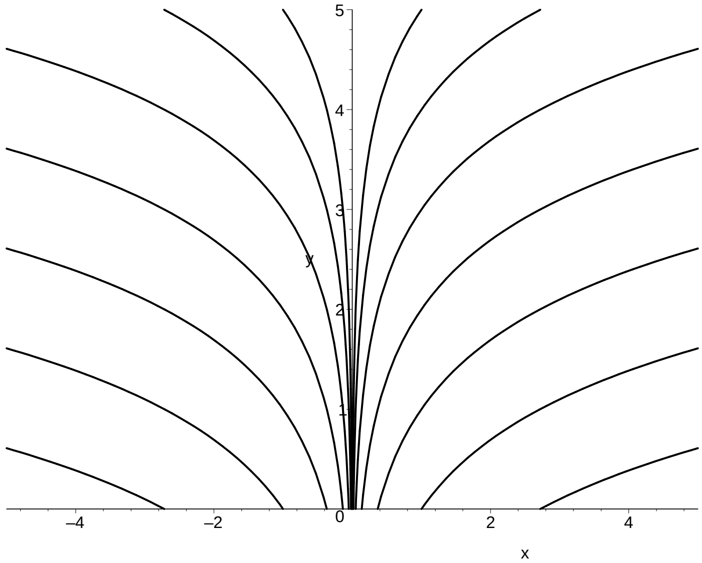
$\boxed{\text{Možnost II, } f \not\equiv 0.}$

Pro $f \not\equiv 0$ máme vyřešit obecnou rovnici tvaru

$$\sum_{j=0}^{d} a_j(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_j} = f(x,u) , \quad x \in \mathbb{R}^d_T := (0,T) \times \mathbb{R}^d , \qquad (1.20)$$

s počáteční podmínkou

$$u(x) = u_0(\overline{x}) \quad \text{na množině } \{x \in \mathbb{R}^d_T;\, x_0 = 0\} , \qquad (1.21)$$



Obrázek 1.1: Charakteristiky rovnice $u_t + xu_x = 0$.

kde $x = (x_0, \overline{x})$, $\overline{x} = (x_1, \dots, x_d)$. Úlohu (1.20)–(1.21) budeme řešit tak, že nejprve vyřešíme poněkud jinou úlohu s homogenní rovnicí (tedy s nulovou pravou stranou). Problém se tím převede do situace, kterou jsme studovali v možnosti I.

Věta 1.3.9 *Buďte $f(x,u)$, $a_j(x,u) \in \mathcal{C}((0,T)\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R})$, $u_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d)$, $G \subset (0,T)\times\mathbb{R}^d$ neprázdná oblast a $J \subset \mathbb{R}$ otevřený interval. Buď dále $w = w(x,u) \in \mathcal{C}^1(G \times J)$ klasické řešení úlohy*

$$\sum_{j=0}^{d} a_j(x,u)\frac{\partial w}{\partial x_j} + f(x,u)\frac{\partial w}{\partial u} = 0\,, \qquad (x,u) \in G \times J\,, \tag{1.22}$$

$$w(x,u) = u - u_0(\overline{x}) \qquad \text{na množině } \{x \in G;\, x_0 = 0\}\,, \tag{1.23}$$

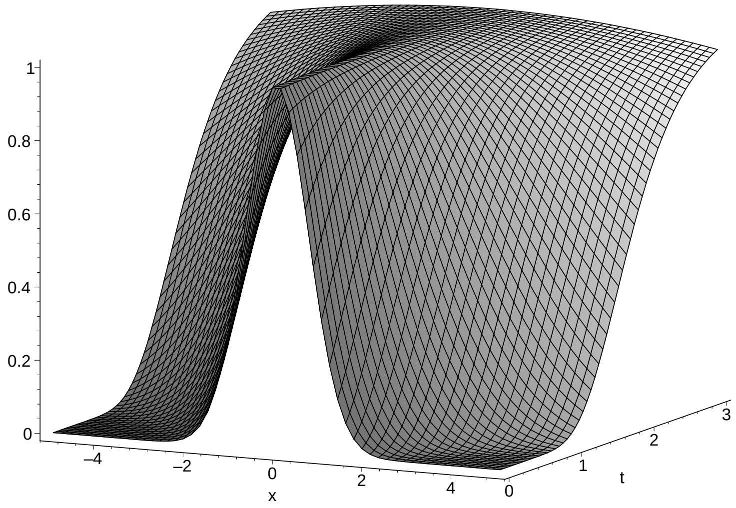
kde $x = (x_0, \overline{x})$, $\overline{x} = (x_1, \dots, x_d)$. Buď dále $(x_p, u_p) \in G \times J$ takový, že $w(x_p,u_p) = 0$, $\frac{\partial w}{\partial u}(x_p,u_p) \neq 0$. Potom existují okolí $\mathcal{U}(x_p) \subset G$, $\mathcal{U}(u_p) \subset J$ a funkce $u \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U}(x_p))$ takové, že

(i) *$w(x,u(x)) = 0$ pro všechna $x \in \mathcal{U}(x_p)$, přitom $u(x_p) = u_p$,*

(ii) *$\frac{\partial w}{\partial u}(x,u) \neq 0$ pro všechna $(x,u) \in \mathcal{U}(x_p) \times \mathcal{U}(u_p)$,*

(iii) *$u = u(x)$ je klasickým (lokálním) řešením úlohy* (1.20)–(1.21) *na $\mathcal{U}(x_p)$.*

Důkaz. Tvrzení (i) a (ii) jsou přímým důsledkem věty o implicitních funkcích. Existence okolí $\mathcal{U}(x_p)$, $\mathcal{U}(u_p)$ a (implicitní) funkce $u \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U}(x_p))$ dokonce nijak nesouvisí s tím, že w řeší nějakou rovnici.



Obrázek 1.2: Funkce $u(x,t) = \exp(-x^2 e^{-2t})$ pro $x \in \langle -5, 5\rangle$, $t \in \langle 0, 3\rangle$.

Pro důkaz (iii) si stačí uvědomit, že pro $x \in \mathcal{U}(x_p)$ je funkce $w(x, u(x))$ spojitě diferencovatelná a identicky nulová na $\mathcal{U}(x_p)$, jsou tedy na $\mathcal{U}(x_p)$ nulové i její derivace podle všech x_j, $j = 0, \dots, d$:

$$\frac{\partial w}{\partial x_j}(x, u(x)) + \frac{\partial w}{\partial u}(x, u(x)) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) = 0\,, \qquad j = 0, \dots, d\,.$$

Vyjádříme z těchto rovností $\frac{\partial w}{\partial x_j}(x, u(x))$, dosadíme do (1.22) a dostaneme:

$$\frac{\partial w}{\partial u}(x, u(x)) \cdot \left(-\sum_{j=0}^{d} a_j(x, u) \frac{\partial u}{\partial x_j} + f(x, u) \right) = 0\,, \qquad x \in \mathcal{U}(x_p)\,.$$

Protože $\frac{\partial w}{\partial u}(x, u(x)) \neq 0$ pro $x \in \mathcal{U}(x_p)$ (viz (i)), musí být nulový výraz v kulaté závorce, což dává (1.20) pro $x \in \mathcal{U}(x_p)$.

Dále je pro $x \in \mathcal{U}(x_p)$, $x_0 = 0$, podle (i) a (1.23),

$$0 = w(x, u(x)) = u(x) - u_0(\overline{x})\,,$$

což není nic jiného než (1.21) na $\{x \in \mathcal{U}(x_p), x_0 = 0\}$.

$\square$

Kapitola 2

Věta Cauchyova–Kowalevské

2.1 Reálně analytické funkce

Na úvod připomeneme některá vžitá a zavedeme některá méně užívaná označení:

- Pro $y \in \mathbb{R}^m$ budeme používat Eukleidovskou normu $\|y\| := \sqrt{\sum_{j=1}^m y_j^2}$ a maximovou normu $|y|_M := \max\{|y_j|,\ j = 1, \dots, m\}$.
- Krychlové m-dimenzionální okolí bodu $y^0 \in \mathbb{R}^m$ o poloměru $\rho > 0$ (a tedy hraně 2ρ) budeme značit $I_\rho^m(y^0) := \{y \in \mathbb{R}^m;\ |y - y^0|_M < \rho\}$. Pokud neuvedeme střed y^0 této krychle, rozumí se, že $y^0 = 0$, tedy $I_\rho^m := I_\rho^m(0)$. Někdy také můžeme vynechat označení pro dimenzi m, bude-li dimenze z kontextu zřejmá nebo nebude-li její konkrétní hodnota v dané situaci důležitá.
- Pro *multiindex* $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$, $\alpha_j \in \mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, \dots\}$ pro $j = 1, \dots, m$, zavádíme kromě již dříve definované *výšky multiindexu* a *derivace podle multiindexu* (viz paragraf 1.1) ještě tato standardní označení:

$$\alpha! := \alpha_1! \dots \alpha_m!\,, \qquad \textit{faktoriál multiindexu,}$$
$$y^\alpha := y_1^{\alpha_1} \dots y_m^{\alpha_m}\,, \quad y \in \mathbb{R}^m\,, \qquad \textit{umocnění na multiindex.}$$

Při důkazu hlavní věty této kapitoly budeme potřebovat následující lemma, zobecňující známou binomickou větu. Tvrzení binomické věty přitom považujeme za známé.

Lemma 2.1.1 (Multinomická věta) *Buď $k \in \mathbb{N}$, $a = (a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{R}^m$. Potom*

$$(a_1 + \dots + a_m)^k = \sum_{|\alpha|=k} \frac{|\alpha|!}{\alpha!}\, a^\alpha\,, \tag{2.1}$$

přičemž $\frac{|\alpha|!}{\alpha!} \in \mathbb{N}$, speciálně tedy $\frac{|\alpha|!}{\alpha!} \geq 1$.

Důkaz. Budeme postupovat indukcí podle m. Je-li $m = 1$, máme na pravé straně rovnosti (2.1) výraz $\sum\limits_{\alpha_1=k} \frac{\alpha_1!}{\alpha_1!} a_1^{\alpha_1} = a_1^k$, dokazovaná rovnost tedy platí.

Nyní proveďme indukční krok[1] (v následujících řádcích symbol [bv] znamená, že použijeme binomickou větu, symbol [ip] značí, že použijeme indukční předpoklad):

$$\begin{aligned}
(a_1 + \cdots + a_{m+1})^k &= \big((a_1 + \cdots + a_m) + a_{m+1}\big)^k \overset{[bv]}{=} \\
&\overset{[bv]}{=} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (a_1 + \cdots + a_m)^j a_{m+1}^{k-j} \overset{[ip]}{=} \\
&\overset{[ip]}{=} \sum_{j=0}^{k} \frac{k!}{(k-j)!j!} \left(\sum_{|\beta|=j} \frac{j!}{\beta_1! \cdots \beta_m!} a_1^{\beta_1} \cdots a_m^{\beta_m} \right) a_{m+1}^{k-j} = \\
&= \sum_{j=0}^{k} \sum_{|\beta|=j} \frac{k!}{\beta_1! \cdots \beta_m! \, (k-j)!} a_1^{\beta_1} \cdots a_m^{\beta_m} a_{m+1}^{k-j} \,. \qquad (2.2)
\end{aligned}$$

Označíme-li nyní $\alpha := (\beta_1, \ldots, \beta_m, k-j)$, máme $|\alpha| = k$ právě tehdy, když $|\beta| = j$, tedy

$$\sum_{j=0}^{k} \sum_{|\beta|=j} = \sum_{|\alpha|=k} ,$$

a výraz, ke kterému jsme dospěli v (2.2), je dále roven

$$\sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\beta_1! \cdots \beta_m! \, (k-j)!} a_1^{\beta_1} \cdots a_m^{\beta_m} a_{m+1}^{k-j} = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} (a_1, \ldots, a_{m+1})^{\alpha} ,$$

což jsme měli dokázat. To, že platí vztah (2.1), rovněž implikuje, že $\frac{|\alpha|!}{\alpha!} \in \mathbb{N}$ (rozmyslete si, jaké koeficienty u výrazů typu a^α lze obdržet násobením vlevo v (2.1)). $\square$

Poznámka 2.1.2 Označíme-li (podobně jako pro délku multiindexu) $|a| = a_1 + \cdots + a_m$, můžeme vztah (2.1) přepsat do následující hezké („symetrické“) verze:

$$\frac{|a|^k}{k!} = \sum_{|\alpha|=k} \frac{a^\alpha}{\alpha!} .$$

Sečteme-li na obou stranách této rovnosti přes $\sum_{k=0}^{\infty}$, dostaneme

$$\exp(a_1 + \cdots + a_m) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=k} \frac{a^\alpha}{\alpha!} =: \sum_{\alpha} \frac{a^\alpha}{\alpha!} .$$

[1] Přesvěčte se, že pro $m = 2$ je (2.1) totéž, co tvrzení binomické věty.

Chcete-li se pocvičit v násobení řad, můžete si jako cvičení zkusit ukázat, že součin řad, které odpovídají výrazu $\exp(a_1)\cdots\exp(a_m)$, je roven řadě na pravé straně předchozí rovnosti. Případně je možno postupovat i naopak: vyjděte ze vztahu $\exp(a_1 + \cdots + a_m) = \exp(a_1)\cdots\exp(a_m)$ pro $a_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, m$, nahraďte exponenciály na obou stranách řadami a dokažte tímto způsobem (alternativně) multinomickou větu.

Nyní zavedeme důležitý pojem reálně analytické funkce.

Definice 2.1.3 (Reálně analytická funkce) *Funkci $f : I^m_\rho(y^0) \to \mathbb{R}$ nazveme reálně analytickou v $I^m_\rho(y^0)$, $y^0 \in \mathbb{R}^m$, $\rho > 0$, pokud existují reálná čísla f_α taková, že řada*

$$\sum_\alpha f_\alpha (y - y^0)^\alpha \qquad \Big(= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=k} f_\alpha (y_1 - y_1^0)^{\alpha_1} \cdots (y_m - y_m^0)^{\alpha_m} \Big) \tag{2.3}$$

konverguje bodově pro všechna $y \in I^m_\rho(y^0)$ k součtu $f(y)$.

Poznámka 2.1.4 Naším cílem není soustavná studie reálně analytických funkcí, proto pouze bez důkazů shrneme některá nejdůležitější fakta a tvrzení, která budeme potřebovat. Čtenář si jistě povšimne analogie s teorií mocninných řad.

(i) Lze ukázat, že pokud řada (2.3) konverguje ve všech bodech $y \in I^m_\rho(y^0)$ k součtu $f(y)$, konverguje také absolutně stejnoměrně na $I^m_\sigma(y^0)$ pro všechna $0 < \sigma < \rho$ a definuje v $I^m_\rho(y^0)$ nekonečněkrát spojitě diferencovatelnou funkci f. Nutnou (nikoli však postačující) podmínkou k tomu, aby f byla reálně analytickou na $I^m_\rho(y^0)$ je tedy aby $f \in \mathcal{C}^\infty(I^m_\rho(y^0))$.

(ii) Řadu (2.3) lze navíc ve všech vnitřních bodech $I^m_\rho(y^0)$ libovolněkrát derivovat člen po členu, tedy pro každý multiindex β platí

$$\mathrm{D}^\beta f(y) = \sum_\alpha f_\alpha \mathrm{D}^\beta (y - y^0)^\alpha , \quad y \in I^m_\rho(y^0) .$$

Odtud dostaneme, že pokud je $f(y) = \sum_\alpha f_\alpha (y - y^0)^\alpha$ pro $y \in I^m_\rho(y^0)$, je už nutně

$$f_\alpha = \frac{\mathrm{D}^\alpha f(y^0)}{\alpha!} \quad \text{pro každý multiindex } \alpha. \tag{2.4}$$

Řada (2.3) je tedy *Taylorovou řadou* svého součtu v $I^m_\rho(y^0)$. Je-li f reálně analytická funkce v $I^m_\rho(y^0)$, jsou koeficienty f_α řady (2.3) určeny jednoznačně vztahy (2.4).

Důkazy těchto (i jiných) tvrzení o reálně analytických funkcích je možno nalézt například v knize [19].

Při důkazu věty Cauchyovy-Kowalevské (Věta 2.2.1) budeme navíc potřebovat následující technické lemma.

Lemma 2.1.5 *Buď*

$$f(y) = \sum_\alpha f_\alpha (y - y^0)^\alpha$$

reálně analytická funkce v $I^m_\rho(y^0)$. *Potom pro každé* $0 < \sigma < \rho$ *existuje* $M > 0$ *taková, že*

$$|f_\alpha| \leq \frac{M}{\sigma^{|\alpha|}} \,. \tag{2.5}$$

Důkaz. Viz např. [19, str. 47].

2.2 Metoda majorizace a věta Cauchyova – Kowalevské

Věta Cauchyova-Kowalevské stanoví lokální existenci (a jednoznačnost) lokální Cauchyovy úlohy pro systém kvazilineárních rovnic 1. řádu. Příklady v předchozí kapitole ukazují, že více než lokální existenci řešení ani očekávat nemůžeme.

Větu zformulujeme a dokážeme v jejím klasickém tvaru, tj. pro evoluční kvazilineární systém 1. řádu, jehož koeficienty explicite nezávisejí na časové proměnné t, s pro nulovou počáteční podmínkou. Později (viz Poznámka 2.2.7) ukážeme, že tento výsledek lze poměrně jednoduše rozšířit i na mnohem obecnější situaci.

Věta 2.2.1 (Cauchy-Kowalevská) *Buďte* $a_{ijr}(x,u)$, $b_r(x,u) : I^{d+s}_\rho \to \mathbb{R}$, $i = 1,\dots,d$, $j,r = 1,\dots,s$, *reálně analytické funkce na* I^{d+s}_ρ, *kde* $\rho > 0$. *Pak existuje* $0 < \rho' \leq \rho$ *a reálně analytické funkce* $u_r : I^{d+1}_{\rho'} \to \mathbb{R}$, $r = 1,\dots,s$, *takové, že pro všechna* $r = 1,\dots,s$ *platí*

$$\frac{\partial u_r}{\partial t}(t,x) = \sum_{j=1}^{s}\sum_{i=1}^{d} a_{ijr}(x,u(t,x))\frac{\partial u_j}{\partial x_i}(t,x) + b_r(x,u(t,x))\,, \quad (t,x) \in I^{d+1}_{\rho'}\,, \tag{2.6}$$

$$u_r(0,x) = 0\,, \quad x \in I^d_{\rho'}\,. \tag{2.7}$$

Ve třídě reálně analytických funkcí jsou u_r *určena vztahy* (2.6)–(2.7) *jednoznačně.*

Důkaz této důležité věty provedeme za chvíli podrobně. Budeme přitom využívat tzv. metodu majorizace, s jejíž základní terminologií se nyní seznámíme.

Definice 2.2.2 *Nechť* f, g *jsou reálně analytické na* I^m_ρ, $\rho > 0$, $f(y) = \sum_\alpha f_\alpha y^\alpha$, $g(y) = \sum_\alpha g_\alpha y^\alpha$. *Řekneme, že* g majorizuje f *(též:* g *je* majorantou f, f *je* majorizováno g*) na* I^m_ρ, *pokud*

$$|f_\alpha| \leq g_\alpha \quad \textit{pro všechny multiindexy } \alpha\,, \tag{2.8}$$

tedy že

$$|\mathrm{D}^\alpha f(0)| \le \mathrm{D}^\alpha g(0) \quad \textit{pro všechny multiindexy } \alpha\,. \tag{2.9}$$

Pro tuto situaci budeme používat značení $f \preccurlyeq g$.

Poznámka 2.2.3 Ze srovnávacího kritéria pro konvergenci řad plyne: platí-li (2.8) resp. (2.9), a řada $\sum_\alpha g_\alpha y^\alpha$ konverguje pro $y \in \mathbb{R}^m$, konverguje pro $y \in \mathbb{R}^m$ řada $\sum_\alpha f_\alpha y^\alpha$ absolutně.

Definice 2.2.4 *Buďte $a_{ijr} \preccurlyeq \widetilde{a}_{ijr}$, $b_r \preccurlyeq \widetilde{b}_r$ na $I^{d+s}_{\rho'}$, $\rho' > 0$, $i = 1,\dots,d$, $j,r = 1,\dots,s$. Pak řekneme, že úloha*

$$\frac{\partial v_r}{\partial t}(t,x) = \sum_{j=1}^{s}\sum_{i=1}^{d} \widetilde{a}_{ijr}(x, v((t,x))\frac{\partial v_j}{\partial x_i}(t,x) + \widetilde{b}_r(x, v(t,x))\,, \quad (t,x) \in I^{d+1}_{\rho'}\,, \tag{2.10}$$

$$v_r(0,x) = 0\,, \quad x \in I^d_{\rho'}\,, \tag{2.11}$$

$r = 1,\dots,s$, je majorantní *k úloze (též:* majorizuje *úlohu)* (2.6)–(2.7).

V této chvíli jsme připraveni dokázat Větu 2.2.1. Důkaz je poněkud technický a je rozdělen do několika kroků. Pro netrpělivé čtenáře nebo pro lepší orientaci čtenářů trpělivých můžeme nejprve nastínit způsob, jakým větu dokážeme. Nejprve se přesvědčíme, že pokud má nějaká majorizující úloha tvaru (2.10)–(2.11) reálně analytické řešení, má reálně analytické řešení i úloha (2.6)–(2.7). Vyzbrojeni touto informací, sestrojíme k úloze (2.6)–(2.7) jistou speciální majorizující úlohu, pro kterou budeme schopni dokonce explicite najít reálně analytické řešení. Výrok o jednoznačnosti, kterým celý důkaz zahájíme, se opírá o jednoznačné vyjádření reálně analytické funkce pomocí Taylorovy řady.

Důkaz Věty 2.2.1.

• *Jednoznačnost:* Ukážeme, že pokud existují reálně analytické funkce $u_r : I^{d+1}_{\rho'} \to \mathbb{R}$ řešící úlohu (2.6)–(2.7), jsou jejich derivace $D^\alpha u_r(0)$ jednoznačně určeny koeficienty (tj. daty) rovnice (2.6). Nechť tedy je $r \in \{1,2,\dots,s\}$ a nechť α je multiindex o $d{+}1$ složkách. Označme $\alpha = (\ell,\beta)$, kde ℓ je složka multiindexu α, odpovídající časové proměnné, a β je multiindex o d složkách, odpovídající prostorovým proměnným. Ukážeme nyní (dokonce), že pro daná r a α existuje polynom $P_{r,\alpha}$ s nezápornými koeficienty (které nezávisejí na datech úlohy) takový, že hodnotu $\mathrm{D}^\alpha u_r(0)$ lze spočítat jako hodnotu polynomu $P_{r,\alpha}$, za jehož proměnné dosadíme hodnoty funkcí a_{ijk}, b_k a všech jejich derivací řádu nepřevyšujícího $|\alpha|$ v bodě 0, kde $i = 1,\dots,d$, $j,k = 1,\dots,s$. Symbolicky tuto skutečnost můžeme zapsat například takto:

$$D^\alpha u_r(0) = P_{r,\alpha}\big(D^{[\alpha]} a_{ijk}(0), D^{[\alpha]} b_k(0)\big)\,. \tag{2.12}$$

Důkaz (2.12) provedeme indukcí podle ℓ.

(a) Nechť $\ell = 0$, jde tedy pouze o prostorové derivace. Jelikož podle (2.7) je $u_r(0, x) \equiv 0$ v $I^d_{\rho'}$, platí $\mathrm{D}^\alpha u_r(0) = 0$ pro všechna $\alpha = (0, \beta)$ (derivujeme jen podle prostorových proměnných). Stačí tedy položit $P_{r,\alpha} \equiv 0$ což je polynom s nezápornými koeficienty.

(b) Nechť $\ell > 0$ a nechť jsou známy všechny polynomy $P_{r,\alpha}$ pro všechny multiindexy α s první složkou menší než ℓ. Pak

$$\mathrm{D}^\alpha u_r = \mathrm{D}^{(\ell-1,\beta)} \frac{\partial u_r}{\partial t} \overset{(2.6)}{=} \mathrm{D}^{(\ell-1,\beta)} \left(\sum_{j=1}^{s} \sum_{i=1}^{d} a_{ijr} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + b_r \right). \tag{2.13}$$

Na pravé straně této rovnosti se po provedení derivací vyskytují pouze derivace funkcí a_{ijr}, b_r a funkce u_j podle multiindexu s první složkou menší než ℓ. Uvažujeme-li získanou rovnost v bodě 0, lze podle indukčního předpokladu za tyto derivace funkcí u_j dosadit polynomy (s nezápornými koeficienty) v proměnných a_{ijk}, b_k a jejich derivací, čímž na pravé straně získáme nový polynom $P_{r,\alpha}$. Jeho koeficienty jsou nezáporné, neboť vznikly derivováním součtů a součinů vpravo v (2.13), a dosazením polynomů s nezápornými koeficienty. Jako proměnné tohoto polynomu jsou použity pouze derivace funkcí a_{ijk}, b_k řádu nepřevyšujícího $|\alpha|$, vyčíslené v bodě 0.

Tím je důkaz jednoznačnosti hotov.

• *1. krok k důkazu existence:* Ukážeme, že pokud nějaká majorizující úloha tvaru (2.10)–(2.11) má v $I^{d+1}_{\rho'}$ reálně analytická řešení v_r, $r = 1, ..., s$, existují v $I^{d+1}_{\rho'}$ i reálně analytická řešení u_r, $r = 1, ..., s$, úlohy (2.6)–(2.7).

Definujme pro $r = 1, \ldots, s$ a multiindex α čísla $U_{r,\alpha} := P_{r,\alpha}\big(D^{[\alpha]} a_{ijk}(0), D^{[\alpha]} b_k(0)\big)$, kde na pravé straně této definice jsou výrazy z pravé strany vztahu (2.12). Potom dostaneme

$$|U_{r,\alpha}| = \big|P_{r,\alpha}\big(D^{[\alpha]} a_{ijk}(0), D^{[\alpha]} b_k(0)\big)\big| \le P_{r,\alpha}\big(\big|D^{[\alpha]} a_{ijk}(0)\big|, \big|D^{[\alpha]} b_k(0)\big|\big)\,,$$

v nerovnosti jsme využili skutečnost, že koeficienty $P_{r,\alpha}$ jsou nezáporné. Dále je, s využitím téhož a definice majorizující úlohy,

$$P_{r,\alpha}\big(\big|D^{[\alpha]} a_{ijk}(0)\big|, \big|D^{[\alpha]} b_k(0)\big|\big) \le P_{r,\alpha}\big(D^{[\alpha]} \widetilde{a}_{ijk}(0), D^{[\alpha]} \widetilde{b}_k(0)\big) = \mathrm{D}^\alpha v_r(0)\,.$$

Poslední rovnost je důsledkem toho, že pro funkce v_r lze provést tutéž úvahu jako pro funkce u_r v předchozí části důkazu (o jednoznačnosti). Protože úloha pro v_r má formálně stejný tvar jako úloha pro u_r, pouze s jinými funkcemi jako daty úlohy, jsou i polynomy $P_{r,\alpha}$ tytéž, pouze za proměnné dosazujeme hodnoty funkcí $\widetilde{a}_{ijk}, \widetilde{b}_k$ a jejich derivací řádu nepřevyšujícího $|\alpha|$, v bodě 0. Celkem tedy máme, pro všechny mulitindexy α a pro všechna $r = 1, \ldots, s$,

$$|U_{r,\alpha}| \le \mathrm{D}^\alpha v_r(0)\,. \tag{2.14}$$

Protože (pro $r = 1, \ldots, s$) konvergují řady $\sum_\alpha \frac{1}{\alpha!} \mathrm{D}^\alpha v_r(0) y^\alpha$ na celém $I_{\rho'}^{d+1}$, konvergují tamtéž podle (2.14) a srovnávacího kritéria (viz Poznámka 2.2.3) i řady

$$\sum_\alpha \frac{1}{\alpha!} U_{r,\alpha} y^\alpha \,, \qquad r = 1, \ldots, s \,, \tag{2.15}$$

které tak definují na množině $I_{\rho'}^{d+1}$ reálně analytické funkce u_r, $r = 1, \ldots, s$. Z jednoznačnosti koeficientů Taylorova rozvoje reálně analytických funkcí pak dostaneme pro všechny mulitindexy α a pro všechna $r = 1, \ldots, s$, rovnosti

$$U_{r,\alpha} = \mathrm{D}^\alpha u_r(0) \,. \tag{2.16}$$

Z uvedené konstrukce je navíc jasné, že levé a pravé strany rovností (2.6) a (2.7) se rovnají v bodě 0 včetně všech svých derivací a jsou si tedy rovny (z jednoznačnosti rozvojů reálně analytických funkcí) všude v $I_{\rho'}^{d+1}$. Funkce u_r jsou tedy řešením problému (2.6)–(2.7).

• *2. krok k důkazu existence:* Nalezneme speciální problém pro funkce v_r, majorizující úlohu (2.6)–(2.7). Zvolme $\sigma \in (0, \rho)$ libovolně. Podle Lemmatu 2.1.5 existuje konstanta $M > 0$ taková, že

$$\Big| \frac{\mathrm{D}^\alpha a_{ijr}(0)}{\alpha!} \Big| < \frac{M}{\sigma^{|\alpha|}} \,, \qquad \Big| \frac{\mathrm{D}^\alpha b_r(0)}{\alpha!} \Big| < \frac{M}{\sigma^{|\alpha|}} \tag{2.17}$$

pro všechna $i = 1, \ldots, d$, $j, r = 1, \ldots, s$, a pro všechny mulitiindexy α (při volbě M využijeme toho, že indexů i, j, r je jen konečný počet). Zvolme dále $0 < \eta < \frac{\sigma}{d+s}$, potom existuje $q < 1$ takové, že pro $z = (x_1, \ldots, x_d, v_1, \ldots, v_s) \in I_\eta^{d+s}$ platí

$$\Big| \frac{x_1 + \cdots + x_d + v_1 + \cdots + v_s}{\sigma} \Big| \le \frac{(d+s)\eta}{\sigma} \le q < 1 \,.$$

Zkoumejme nyní pro $z = (x, v) \in I_\eta^{d+s}$ funkci

$$\begin{aligned} H(x,v) := \frac{M}{1 - \frac{x_1 + \cdots + x_d + v_1 + \cdots + v_s}{\sigma}} &= M \sum_{k=0}^\infty \frac{(x_1 + \cdots + x_d + v_1 + \cdots + v_s)^k}{\sigma^k} = \\ = M \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{\sigma^k} \sum_{|\alpha| = k} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} z^\alpha &= \sum_\alpha H_\alpha z^\alpha \,, \end{aligned}$$

kde

$$H_\alpha = \frac{M}{\sigma^{|\alpha|}} \cdot \frac{|\alpha|!}{\alpha!} \ge \frac{M}{\sigma^{|\alpha|}} \,. \tag{2.18}$$

Využili jsme postupně vzorec pro součet geometrické řady, multinomickou větu a na závěr skutečnost, že $\frac{|\alpha|!}{\alpha!} \ge 1$, viz Lemma 2.1.1. Funkce H je tedy reálně analytická na I_η^{d+s}. Porovnáním (2.17) a (2.18) zjistíme, že odhady

$$\Big| \frac{\mathrm{D}^\alpha a_{ijr}(0)}{\alpha!} \Big| < H_\alpha \,, \qquad \Big| \frac{\mathrm{D}^\alpha b_r(0)}{\alpha!} \Big| < H_\alpha \tag{2.19}$$

platí pro všechna $i = 1, \ldots, d$, $j, r = 1, \ldots, s$, a pro všechny mulitiindexy α, a tedy kvazilineární úloha

$$\frac{\partial v_r}{\partial t}(t,x) = H(x,v)\left(1 + \sum_{j=1}^{s}\sum_{i=1}^{d}\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right), \quad (t,x) \in I_\eta^{d+1}, \tag{2.20}$$

$$v_r(0,x) = 0, \quad x \in I_\eta^d, \tag{2.21}$$

$r = 1, \ldots, s$, kde $H(x,v) = \frac{M\sigma}{\sigma-(x_1+\cdots+x_d+v_1+\cdots+v_s)}$, majorizuje úlohu (2.6)–(2.7).

• *3. krok k důkazu existence:* Zbývá nám nalézt (jakékoli) reálně analytické řešení problému (2.20)–(2.21). Označme $y = x_1 + \cdots + x_d$. Řešení budeme hledat ve tvaru

$$v_1(t,x) = \cdots = v_s(t,x) = w(t,y)$$

(stačí nám jakékoli řešení, budeme je proto nejprve hledat v co nejjednodušším tvaru). Problém (2.20)–(2.21) se tedy redukuje na

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{M\sigma}{\sigma - y - sw}\left(1 + sd\frac{\partial w}{\partial y}\right), \quad (t,y) \in I_\delta^2, \tag{2.22}$$

$$w(0,y) = 0, \quad y \in I_\delta^1, \tag{2.23}$$

kde $\delta > 0$ určíme později. Protože (2.22)–(2.23) je (lokální) Cauchyova úloha pro jednu kvazilineární rovnici prvního řádu s jednou okrajovou podmínkou, je možno její řešení nalézt například metodou charakteristik (viz paragraf 1.3).

Čtenáři doporučujeme výpočet provést jako cvičení a zjistit, že funkce

$$w(t,y) = \frac{\sigma - y - \sqrt{(\sigma-y)^2 - 2s(d+1)M\sigma t}}{s(d+1)}, \quad (t,y) \in I_\delta^2, \tag{2.24}$$

je pro dostatečně malé $\delta > 0$ reálně analytická funkce na I_δ^2, která na této množině řeší problém (2.22)–(2.23).

Zvolme konečně $\rho' := \min\left(\frac{\delta}{d}, \eta\right)$. Podle předchozích úvah jsou funkce $v_1(t,x) = \cdots = v_s(t,x) := w(t,y)$ reálně analytickým řešením problému (2.22)–(2.23) na $I_{\rho'}^{d+1}$. Proto i problém (2.22)–(2.23) má reálně analytické řešení na $I_{\rho'}^{d+1}$.

Tím je důkaz věty Cauchyovy-Kowalevské proveden. □

Cvičení 2.2.5 *Nalezněte jako cvičení řešení $w(t,y)$ problému* (2.22)–(2.23)*, tvaru* (2.24)*, a to metodou charakteristik.*

Poznámka 2.2.6 (*Lewyho protipříklad.*) Požadavek, že funkce a_{ijr}, b_r musí být reálně analytické, nelze vynechat. Lewy zkonstruoval následující protipříklad. Pro $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ označme

$$Lu := \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial y} - 2i(x+iy)\frac{\partial u}{\partial z}.$$

Potom existuje $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$, která není analytická, a taková, že rovnice

$$Lu = f$$

nemá klasické řešení na žádné otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{R}^3$.

Poznámka 2.2.7 Ukažte, že Větu 2.2.1 lze podstatně zobecnit:

1. V (2.6) lze připustit závislost koeficientů úlohy na proměnné t, tj. $a_{ijr} = a_{ijr}(t, x, u)$, $b_r = b_r(t, x, u)$. Návod: Uvažujte novou „neznámou" funkci $u_{s+1} \equiv t$ a sestavte pro ni $(s+1)$. rovnici a počáteční podmínku. Ukažte, že pro novou vektorovou funkci $\widetilde{u} := (u_1, \ldots, u_s, u_{s+1})$ dostaneme systém typu (2.6), (2.7), kde $a_{ijr} = a_{ijr}(x, \widetilde{u})$, $b_r = b_r(x, \widetilde{u})$.

2. Ve (2.7) lze připustit obecnou počáteční podmínku $u_r(0, x) = \varphi_r(x)$, kde $\varphi_r(x)$ je reálně analytická funkce. Návod: Uvažujte nové neznámé funkce $v_r(t, x) := u_r(t, x) - \varphi_r(x)$.

3. Diskutujte lokálnost existence řešení. Uvažte, že lokální řešení lze „slepovat" nejen v prostoru, ale i v čase, tj. pokud řešení existuje například pro $|x - x^0| < \delta$ a pro $t = t_0 > 0$ (označme toto řešení U), lze uvažovat systém (2.6) v $I_\delta^{d+1}([t_0, x^0])$ s počáteční podmínkou $u_r(t_0, x) = U_r(t_0, x)$ v $I_\delta^d(x^0)$. Odůvodněte, že Větu 2.2.1 lze zobecnit takto: je-li $\Omega \subset \mathbb{R}^{d+1}$ oblast, „kde jsou všechny koeficienty úlohy (tj. a_{ijr}, b_r, příp. φ_r) reálně analytické" (zformulujte přesně!), existuje $\Omega' \subset \Omega$, na které existuje (ve třídě reálně analytických funkcí jednoznačně určené) řešení (2.6), (2.7).

4. Konečně: v (2.6) lze připustit i systém zcela obecných parciálních diferenciálních rovnic vyššího řádu, za následujících omezujících předpokladů:

   (a) všechny rovnice v systému lze (alespoň lokálně) převést na rovnice vyřešené vzhledem k nejvyšší derivaci podle jedné z proměnných (ve všech rovnicích musí tato proměnná být tatáž); pak lze vhodnými substitucemi převést takový systém na systém tvaru (2.6);

   (b) koeficienty úlohy (po provedení výše naznačených substitucí) musí být reálně analytické, tj. původní systém musí být tvořen „reálně analytickými závislostmi";

   (c) počáteční podmínky úlohy musí být takové, aby po převedení na systém tvaru v (2.6) byl k dispozici dostatečný počet reálně analytických podmínek tvaru (2.7); poznámka: někdy může dojít k situaci, kdy musíme proderivováním zvýšit řád rovnice, v takové situaci je nutno zvolit novou počáteční podmínku, která je automaticky splněna pro původní rovnice.

   Diskutujte celou situaci na příkladu dvou rovnic:

(i) Zcela obecná rovnice druhého řádu ve dvou proměnných, vyřešená vzhledem k u_{tt}:

$$u_{tt} = F(x, t, u, u_x, u_t, u_{xt}, u_{xx}) \tag{2.25}$$

s podmínkami

$$u(0, x) = \varphi(x)\,, \tag{2.26}$$

$$u_t(0, x) = \psi(x)\,. \tag{2.27}$$

Ukažte, že pokud jsou F, φ, ψ reálně analytické funkce svých proměnných, existuje (lokálně) jediné reálně analytické řešení problému (2.25)–(2.27). Návod: Položte $t = u_1$, $u = u_2$, $u_x = u_3$, $u_t = u_4$, $u_{xt} = u_5$, $u_{xx} = u_6$.

(ii) Zcela obecná rovnice 1. řádu ve dvou proměnných:

$$F(x, y, u, u_x, u_y) = 0\,. \tag{2.28}$$

Návod: Nejprve proderivujte celou rovnici podle (například) y. Vypočtěte u_{yy} a postupujte dle předchozího příkladu. Diskutujte počáteční podmínky, zejména novou podmínku typu „$F(\dots)|_{y=0} = 0$“, která je splněna automaticky pro řešení původní rovnice. Proč vlastně je potřeba nová podmínka a proč je vhodné ji mít takového tvaru?

Na základě předchozích úvah ukažte:

5. Úloha pro Laplaceovu rovnici

$$\Delta u = 0\,, \tag{2.29}$$

$$u(x, 0) = \varphi(x)\,, \tag{2.30}$$

$$u_y(x, 0) = \psi(x)\,, \tag{2.31}$$

má v okolí $\{y{=}0\}$ jediné reálně analytické řešení (jsou-li φ, ψ reálně analytické v okolí $\{y{=}0\}$).

6. Úloha (2.6)–(2.7) nemusí být vždy korektně zadána! Tj. řešení sice existuje a je jediné, ale nemusí záviset spojitě na datech úlohy. Návod: V předchozí situaci úlohy (2.29)–(2.31) uvažujte tzv. Hadamardův příklad: $\varphi(x) = 0$, $\psi(x) = \frac{\sin nx}{n^k}$. Odůvodněte, že funkce $u(x, y) = \frac{e^{ny} - e^{-ny}}{2n^{k+1}} \sin nx$ je jediné reálně analytické řešení úlohy (2.29)–(2.31). Přitom pro toto řešení platí výrok:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \forall\, y_1 > 0 \;\; \forall\, K > 0 \;\; \exists\, n, k \in \mathbb{N},$$

že

$$\|\varphi\|_{\mathcal{C}(\mathbb{R})} + \|\psi\|_{\mathcal{C}(\mathbb{R})} < \varepsilon\,,$$

a přitom pro libovolné $a < b$ (v proměnné x)

$$\|u(\cdot, y_1)\|_{\mathcal{C}(\langle a,b\rangle)} > K\,.$$

Tento příklad nám naznačuje, že úloha (2.29)–(2.31) asi nebude „ta správná okrajová úloha“ pro Laplaceův operátor.

7. Pro vhodnou sadu počátečních podmínek ukažte, že lokálně existuje jediné (reálně analytické) řešení tzv. Stokesova systému v $\mathbb{R}^2$ (případně v $\mathbb{R}^3$), pro funkce $\vec{u} = (u, v)$ (případně $\vec{u} = (u, v, w)$) a p (reprezentující po řadě rychlost a tlak),

$$\Delta \vec{u} - \nabla p = 0\,, \tag{2.32}$$
$$\operatorname{div} \vec{u} = 0\,. \tag{2.33}$$

Návod: Věřili byste, že například pro problém ve dvou dimenzích budete potřebovat 5 počátečních podmínek? A co víc, dokázali byste si tuto víru logicky odůvodnit?

2.3 Charakteristické směry a plochy

Problematiku charakteristických směrů a ploch budeme ilustrovat na lokální Cauchyově úloze pro lineární PDR k-tého řádu, která je vyřešena vzhledem k nejvyšší časové derivaci. Buď tedy $G \subset (-T, T) \times \mathbb{R}^d$ neprázdná, omezená, „časoprostorová“ oblast, $T > 0$. Uvažujme v G rovnici pro neznámou funkci $u = u(t, x) : G \to \mathbb{R}$,

$$\frac{\partial^k u}{\partial t^k} = \sum_{\substack{|\alpha| \le k \\ \alpha \neq (k,0,\dots,0)}} a_\alpha(t, x) D^\alpha u + f(t, x)\,, \qquad (t, x) \in G\,, \tag{2.34}$$

s počátečními podmínkami, definovanými na množině $\Omega := G \cap \{t = 0\}$,

$$\left.\begin{aligned} u(0, x) &= g_0(x)\,, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) &= g_1(x)\,, \\ &\vdots \\ \frac{\partial^{k-1} u}{\partial t^{k-1}}(0, x) &= g_{k-1}(x)\,, \end{aligned}\right. \qquad x \in \Omega\,, \tag{2.35}$$

kde $g_j(x) : \Omega \to \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, k - 1$, jsou dané funkce.

Poznámka 2.3.1 Jsou-li funkce a_α, f reálně analytické na otevřené množině $H \subset G$ takové, že $H \cap \Omega \neq \emptyset$, existuje podle důsledků věty Cauchy-Kowalevské otevřená množina $A \subset H$, a jednoznačně určená reálně analytická funkce $u : A \to \mathbb{R}$, splňující (2.34) v A a (2.35) v $A \cap \Omega$. Čtenáři doporučujeme si jako cvičení převést vhodnými substitucemi úlohu (2.34)–(2.35) na úlohu typu Cauchy-Kowalevské, (2.6)–(2.7), a uvědomit si znovu, jak souvisí počet a tvar počátečních podmínek s tvarem rovnice, resp. s procesem převodu této rovnice do tvaru (2.6). Naším dalším cílem bude zkoumat právě tuto „souhru“ tvaru rovnice a počátečních podmínek pro obecnější úlohu k-tého řádu a pro počáteční podmínky zadané na obecnější d-dimenzionální ploše.

Mějme tedy rovnici

$$\sum_{|\alpha|\le k} a_\alpha(t,x)\,\mathrm{D}^\alpha v + f(t,x) = 0\,, \qquad (t,x)\in G\,, \tag{2.36}$$

a předepišme počáteční podmínky na d-dimenzionální hladké regulární (nad)ploše $S \subset G$. Předpokládáme, že S je orientována spojitým polem vektorových normál $\vec{\nu}$.

Počáteční podmínky jsou tvaru

$$\left.\begin{aligned} v(t,x) &= \varphi_0(t,x)\,,\\ \frac{\partial v}{\partial\vec{\nu}}(t,x) &= \varphi_1(t,x)\,,\\ &\ \vdots\\ \frac{\partial^{k-1} v}{\partial\vec{\nu}^{k-1}}(t,x) &= \varphi_{k-1}(x)\,, \end{aligned}\right. \qquad (t,x)\in S\,, \tag{2.37}$$

kde $\varphi_j(t,x) : S \to \mathbb{R}$, $j = 1,\dots,k-1$, jsou dané funkce.

Úloze (2.36)–(2.37) říkáme *zobecněná (lokální) Cauchyova úloha* pro lineární rovnici k-tého řádu.

Poznámka 2.3.2 Symbolem $\frac{\partial^j v}{\partial\vec{\nu}^j}(t,x)$, $j = 0,\dots,k-1$ značíme j-tou derivaci ve směru vektoru $\vec{\nu} = (\nu_t,\nu_1,\dots,\nu_d)$. Ztotožníme-li opět (zejména kvůli jednoduchosti zápisu) $t \equiv x_0$, $\nu_t = \nu_0$, platí

$$\frac{\partial^j v}{\partial\vec{\nu}^j}(t,x) = \sum_{\substack{i_0,\dots,i_d=0\\ i_0+\dots+i_d=j}}^{j} \frac{\partial^j v(t,x)}{\partial x_0^{i_0}\dots\partial x_d^{i_d}}\nu_0^{i_0}\dots\nu_d^{i_d} = \sum_{|\alpha|=j}\mathrm{D}^\alpha v(t,x)\nu^\alpha\,, \tag{2.38}$$

$j = 0,\dots,k-1$, speciálně tedy $\frac{\partial v}{\partial\nu} = \nabla_{(t,x)}v\cdot\vec{\nu}$.

Porovnejte charakter počátečních podmínek (2.37), zadaných na „křivé“ ploše S, a počátečních podmínek (2.35), zadaných na „rovné“ ploše Ω. Ve obou případech předepisujeme hodnoty řešení a jejich derivací ve směru kolmém na příslušnou plochu.

Naším cílem nyní bude vhodným zobrazením „narovnat“ plochu S tak, abychom zachovali směr normálového verktoru k S, a transformovat pomocí tohoto zobrazení v bodech plochy S jak rovnici (2.36), tak počáteční podmínky (2.37). Poté se budeme snažit popsat podmínky, za kterých je možno po transformaci obdržet úlohu tvaru (2.34)–(2.35) s vypočítanou nejvyšší derivací neznámé funkce podle proměnné, která bude po transformaci hrát roli „času“.

Pro jednoduchost budeme předpokládat, že plochu S lze ztotožnit s grafem dostatečně hladké (v našem případě alespoň $\mathcal{C}^2$) funkce, tedy že

$$S = \{(t,x)\in G,\ t=\psi(x),\ \psi\in\mathcal{C}^2(\Omega),\ \Omega\subset\mathbb{R}^d \text{ omezená oblast}\}\,. \tag{2.39}$$

Plochu S lze tedy parametrizovat zobrazením $\Phi \in \mathcal{C}^2(\Omega; S)$

$$\Phi : \begin{cases} t &= \psi(z)\,, \\ x_j &= z_j\,, \qquad j = 1, \ldots, d\,. \end{cases} \tag{2.40}$$

Abychom předešli nedorozuměním, rozlišujeme x (x-ová souřadnice bodu $(t, x) \in S$) a z (parametrizující proměnná, $z \in \Omega$), přestože $x = z$, ja vidíme v (2.40).

Zobrazení Φ definuje v každém bodě $(t, x) \in S$ d-tici lineárně nezávislých tečných vektorů $\vec{T}^j(t, x) = \vec{T}^j(\psi(z), z) =: \vec{T}^j(z)$, kde

$$\vec{T}^j(z) = \frac{\partial \Psi}{\partial z_j}(z) = \left(\frac{\partial \psi}{\partial z_j}, 0, \ldots, \underbrace{1}_{(j+1).\ \text{místo}}, \ldots, 0 \right) \in \mathbb{R}^{d+1}\,, \tag{2.41}$$

$j = 1, \ldots, d$. Odtud plyne, že vektor

$$\vec{\nu}(z) := \left(1, -\frac{\partial \psi}{\partial z_1}, \ldots, -\frac{\partial \psi}{\partial z_d} \right) = (1, -\nabla_z \psi)\,, \tag{2.42}$$

který zřejmě splňuje $\vec{\nu}(z) \cdot \vec{T}^j(z) = 0$ (pro všechna $z \in \Omega$ a všechna $j = 1, \ldots, d$), je normálovým vektorem k S v bodě $(t, x) \in S$. Pro souřadnice normálového vektoru budeme používat značení $\vec{\nu} = (\nu_t, \nu_1, \ldots, \nu_d) = (\nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_d)$, v souladu s obvyklým ztotožněním $t \equiv x_0$. Tedy je

$$\nu_0 = \nu_t = 1\,, \qquad \nu_j(z) = -\frac{\partial \psi}{\partial z_j}(z)\,, \qquad j = 1, \ldots, d\,, \quad z \in \Omega\,. \tag{2.43}$$

Definujme nyní zobrazení $\omega \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R} \times \Omega; G)$ předpisem $\omega = \omega(\tau, z) = (t, z) \in G$, kde

$$\begin{aligned} t &= \psi(z) + \tau \nu_0(z)\,, \\ x_j &= z_j \quad + \tau \nu_j(z)\,, \qquad j = 1, \ldots, d\,, \quad (\tau, z) \in \mathbb{R} \times \Omega\,, \end{aligned} \tag{2.44}$$

přičemž $\psi(z)$ je zobrazení z (2.40) a $\nu_j(z)$ jsou složky normálového vektoru $\vec{\nu}$, viz (2.43). Vidíme, že $(t, x) \in S$ právě tehdy, když $\tau = 0$ (tedy že $\omega(\Omega) = S$) a že

$$\frac{\partial \omega}{\partial \tau}(z) = \vec{\nu}(z)\,, \quad z \in \Omega\,.$$

Zobrazení ω tedy vychází z parametrizace $\Psi : \Omega \to S$, přičemž posunutí bodu $(0, z) \in \{0\} \times \Omega$ ve směru osy τ odpovídá posunutí bodu $\omega(0, z) = (t, x) \in S$ ve směru vektoru $\vec{\nu}$.

Z (2.43), (2.44) dále dostáváme

$$\begin{aligned} &\frac{\partial t}{\partial \tau} = 1\,, && \frac{\partial t}{\partial z_j} = \frac{\partial \psi}{\partial z_j}(z) = -\nu_j(z)\,, && j = 1, \ldots, d\,, \\ &\frac{\partial x_j}{\partial \tau} = \nu_j(z)\,, && \frac{\partial x_j}{\partial z_i} = \delta_{ij} + \tau \frac{\partial}{\partial z_i}\big(\nu_j(z)\big)\,, && i, j = 1, \ldots, d\,, \end{aligned} \tag{2.45}$$

kde δ_{ij} je Kroneckerův symbol, $\delta_{ij} = 0$ pro $i \neq j$, $\delta_{jj} = 1$.

Spočteme determinant[2] Jacobiho matice derivací (tj. jakobián) zobrazení ω v bodech množiny $\{0\} \times \Omega$:

$$J_\omega(0,z) = \det\left(\frac{D(t,x)}{D(\tau,z)}\bigg|_{\tau=0}\right) \overset{(2.45)}{=} \begin{vmatrix} 1 & -\nu_1 & -\nu_2 & \dots & -\nu_d \\ \nu_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \nu_2 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \nu_d & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} =$$
$$= 1 + \|\vec{\nu}\|^2 > 0\,. \tag{2.46}$$

Díky hladkosti ω tedy existuje $\varepsilon > 0$ takové, že jakobián zobrazení ω je nenulový na $(-\varepsilon, \varepsilon) \times \Omega$. Podle věty o inverzním zobrazení tedy existuje inverzní zobrazení $\omega^{-1} \in \mathcal{C}^1(H; (-\varepsilon,\varepsilon)\times\Omega$, kde $H := \omega((-\varepsilon,\varepsilon)\times\Omega)$. Jacobiho matici derivací zobrazení $omega^{-1}$ na množině S lze spočítat z (2.46):

$$\left(\frac{D(\tau,z)}{D(t,x)}\bigg|_{(t,x)\in S}\right) = \tag{2.47}$$
$$= \left(\frac{D(t,x)}{D(\tau,z)}\bigg|_{\tau=0}\right)^{-1} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & \nu_1 & \nu_2 & \dots & \nu_d \\ -\nu_1 & 1+\sum\limits_{j\neq 1}\nu_j^2 & -\nu_1\nu_2 & \dots & -\nu_1\nu_d \\ -\nu_2 & -\nu_2\nu_1 & 1+\sum\limits_{j\neq 2}\nu_j^2 & \dots & -\nu_2\nu_d \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\nu_d & -\nu_d\nu_1 & -\nu_d\nu_2 & \dots & 1+\sum\limits_{j\neq d}\nu_j^2 \end{pmatrix},$$

kde $\gamma = \gamma(t,x) = \frac{1}{1+\|\vec{\nu}(t,x)\|^2}$, $(t,x) \in S$. Speciálně tedy je

$$\frac{\partial\tau}{\partial t}(t,x) = \gamma\,, \qquad \frac{\partial\tau}{\partial tx_j}(t,x) = \gamma\nu_j(t,x)\,, \quad j = 1,\dots,d\,, \quad (t,x)\in S\,. \tag{2.48}$$

Definujme nyní funkci

$$w(\tau,z) := v(t(\tau,z), x(\tau,z)) = v(\omega(\tau,z))\,, \qquad (\tau,z) \in (-\varepsilon,\varepsilon)\times\Omega\,, \tag{2.49}$$

kde v je funkce z (2.36)–(2.37). Potom je především

$$w(0,z) = v(\omega(0,z)) = v(t(0,z), x(0,z))\,, \qquad (t,x) \in S\,,$$

definujeme-li tedy

$$\widetilde{\varphi}_0(z) := \varphi_0\big(\omega(0,z)\big)\,, \quad z \in \Omega \tag{2.50}$$

[2]Násobte například $(j+1)$. řádek determinantu číslem ν_j a přičtěte jej k prvnímu řádku. To opakujte pro $j = 1,\dots,d$.

kde φ_0 je funkce z (2.37), travsformuje se počáteční podmínka $v(t,x) = \varphi_0(t,x)$, $(t,x) \in S$, na

$$w(0,z) = \widetilde{\varphi}_0(z)\,, \qquad z \in \Omega\,. \tag{2.51}$$

Dále máme, pro $(t,x) = \omega(0,z) \in S$,

$$\frac{\partial w}{\partial \tau}(0,z) = \frac{\partial v}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial \tau} + \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial v}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial x_j}{\partial \tau} \overset{(2.45)}{=} \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial v}{\partial x_j} \cdot \nu_j = \frac{\partial v}{\partial \vec{\nu}}\big((\omega(0,z)\big)\,. \tag{2.52}$$

Podobně dostaneme $\frac{\partial^j w}{\partial \tau^j}(0,z) = \frac{\partial^j v}{\partial \vec{\nu}^j}\big((\omega(0,z)\big)$, $j = 2,\ldots,k-1$ (proveďte výpočet podrobně!), a tedy definujeme-li

$$\widetilde{\varphi}_j(z) := \varphi_j\big(\omega(0,z)\big)\,, \quad z \in \Omega\,, \tag{2.53}$$

dostaneme transformací počátečních podmínek (2.37) pro funkci v sadu počátečních podmínek pro w,

$$\frac{\partial^j w}{\partial \tau^j}(0,z) = \widetilde{\varphi}_j(z)\,, \quad z \in \Omega\,, \quad j = 0,\ldots,k-1\,. \tag{2.54}$$

Transformací rovnice (2.36) vznikne rovnice tvaru

$$\sum_{|\beta| \le k} c_\beta(\tau,z) \mathrm{D}^\beta w + \widetilde{f}(\tau,z) = 0\,, \qquad (\tau,z) \in (-\varepsilon,\varepsilon) \times \Omega\,. \tag{2.55}$$

Zajímá nás hodnota koeficientu, který stojí u $\frac{\partial^k w}{\partial \tau^k}$, tedy koeficientu $c_{\widetilde{\beta}}(\tau,z)$ pro $\widetilde{\beta} = (k,0,\ldots,0)$. Bude-li tento koeficient nenulový, bude možné z (2.55) vypočítat $\frac{\partial^k w}{\partial \tau^k}$. Tím bude dokončeno převedení zobecněné Cauchyovy úlohy (2.36)–(2.37) na Cauchyovu úlohu tvaru (2.34)–(2.35). Transformaci rovnice (2.36) budeme zkoumat v bodech plochy S – nenulovost příslušného koeficientu na ploše S bude díky hladkosti znamenat jeho nenulovost i na okolí plochy S.

Spočtěme nejprve $\frac{\partial v}{\partial x_i}(t,x)$, $\frac{\partial v}{\partial t}(t,x)$, kde $(t,x) \in S$. Dostaneme, s využitím (2.48),

$$\frac{\partial v}{\partial x_i}(t,x) = \underbrace{\sum_{j=1}^{d} \frac{\partial w}{\partial z_j}(0,z) \frac{\partial z_j}{\partial x_i}(t,x)}_{\text{neobsahuje } \frac{\partial w}{\partial \tau}} + \frac{\partial w}{\partial \tau}(0,z) \underbrace{\frac{\partial \tau}{\partial x_i}(t,x)}_{=\gamma\nu_i}\,,$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t,x) = \underbrace{\sum_{j=1}^{d} \frac{\partial w}{\partial z_j}(0,z) \frac{\partial z_j}{\partial t}(t,x)}_{\text{neobsahuje } \frac{\partial w}{\partial \tau}} + \frac{\partial w}{\partial \tau}(0,z) \underbrace{\frac{\partial \tau}{\partial t}(t,x)}_{=\gamma\nu_0}\,.$$

Z uvedeného výpočtu vyplývá, že výraz $\frac{\partial^k w}{\partial \tau^k}(0,z)$ lze obdržet pouze tehdy, je-li funkce v derivována podle mulitindexu α výšky k. Koeficient u $\frac{\partial^k w}{\partial \tau^k}(0,z)$ bude pak roven

$$c_{\widetilde{\beta}}(0,z) = \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(0,z) \gamma^{|\alpha|} \nu_0^{\alpha_0} \ldots \nu_d^{\alpha_d}(z)\,,$$

tj.

$$c_{\widetilde{\beta}}(0,z) = \gamma^k \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(t,x)\nu^\alpha\,, \tag{2.56}$$

kde $(t,x) = \omega(0,z) \in S$, $\nu = \vec{\nu}(t,x)$ je normálový vektor k S v bodě (t,x), a $\gamma = (1 + \|\vec{\nu}\|^2)^{-1} > 0$. Transformaci zobecněné Cauchyovy úlohy tedy bude možno dokončit, bude-li suma vpravo v (2.56) nenulová.

Pokud je uvedená suma nulová, nelze z transformované rovnice (2.55) vypočítat $\frac{\partial^k w}{\partial \tau^k}(0,z)$. Tuto důležitou situaci ošetřuje následující definice.

Definice 2.3.3 (Charakteristické směry a plochy)

- *Řekneme, že vektor $\xi \in \mathbb{R}^{d+1}$ je* charakteristickým směrem *rovnice* (2.36) *(případně: je* charakteristickým vektorem *rovnice* (2.36)*), pokud $\xi \neq 0$ a přitom*

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(t,x)\,\xi^\alpha = 0 \tag{2.57}$$

Výrazu vlevo v (2.57) *říkáme* symbol *rovnice* (2.36) *v bodě (t,x).*

- *Buď S d-dimenzionální hladká plocha v $\mathbb{R}^{d+1}$. Řekneme, že bod $y \in S$ je* charakteristickým bodem plochy *S vzhledem k rovnici* (2.36)*, pokud normála k S v bodě y má směr charakteristického vektoru rovnice* (2.36) *v bodě $y \in S$.*

- *Řekneme, že d-dimenzionální hladká plocha $S \subset \mathbb{R}^{d+1}$ je* charakteristickou plochou rovnice (2.36)*, je-li každý její bod charakteristickým bodem rovnice* (2.36)*.*

Zadáme-li tedy počáteční podmínky tvaru (2.37) na charakteristické ploše S rovnice (2.36), nemusí mít úloha (2.36)–(2.37) řešení na okolí bodů $(t,x) \in S$, neboť z předchozích úvah plyne, že v bodech $(t,x) \in S$ ji nelze převést na úlohu tvaru (2.34)–(2.35).

V následujících příkladech budeme zkoumat tvar charakteristických ploch pro některé základní typy PDR.

Příklad 2.3.4 Laplaceova rovnice. Uvažujme rovnici $\Delta u = \sum_{j=1}^d \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = 0$ v neprázdné oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. Hledáme tedy takové $\xi \in \mathbb{R}^d$, $\xi \neq 0$, že $\sum_{j=1}^d \xi_j^2 = 0$. Takové ξ však neexistuje, a proto není žádná ($d{-}1$ dimenzionální) plocha $S \subset \mathbb{R}^d$ její charakteristickou plochou. Počáteční podmínky, a sice hodnotu řešení a první derivaci ve směru normály, lze tedy zadat na libovolné hladké ploše. Hadamardův příklad však ukazuje, že taková úloha nemusí být korektně zadaná.

Příklad 2.3.5 Rovnice vedení tepla. Uvažujme rovnici $\frac{\partial u}{\partial t} - a^2\Delta u = 0$, $(t,x) \in (0,T) \times \Omega$, kde $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je neprázdná oblast, $a > 0$. Hledáme $\xi = (\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_d) \in \mathbb{R}^{d+1}$, $\xi \neq 0$ takový, že $-a^2 \sum_{j=1}^d \xi_j^2 = 0$. Odtud plyne $\xi_1 = \cdots = \xi_d = 0$. Souřadnice

ξ_0 vektoru ξ však není součástí symbolu rovnice vedení tepla, protože ten bere do úvahy pouze nejvyšší derivace. Proto má rovnice vedení tepla charakteristické smry, a sice všechny násobny vektoru $\xi = (1, 0, \ldots, 0)$. Charakteristické plochy RVT jsou tedy plochy tvaru $\{(t, x), t = \text{konst.}, x \in \Omega\}$. Zvláštností RVT je přitom skutečnost, že pro rovnici vedení tepla je nejtypičtější zadávat počáteční podmínky právě na ploše $\{t = 0\}$, která je její plochou charakteristickou. Při studiu této rovnice (viz Kapitola 4) uvidíme, že řešení takto zadané úlohy nebude existovat na (symetrickém) okolí bodů $(0, x)$, ale pouze pro $t > 0$. Je to jeden z důsledků skutečnosti, že počáteční podmínky pro RVT byly zadány na charakteristické ploše.

Příklad 2.3.6 Vlnová rovnice. Uvažujme rovnici $\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0$, $(t, x) \in (0, T) \times \Omega$, kde $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je neprázdná oblast, $c > 0$. Hledáme $\xi = (\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_d) \in \mathbb{R}^{d+1}$, $\xi \neq 0$ takové, že $(\xi_0/c)^2 = \sum_{j=1}^d \xi_j^2$. Tato rovnice popisuje body d-rozměrné kuželové plochy (s výjimkou jejího vrcholu): pro pevné $\xi_0 \neq 0$ leží body $\xi_1, \ldots, \xi_d$ na kouli o poloměru ξ_0/c, jehož velikost tedy závisí lineárně na ξ_0. Charakteristické plochy jsou tedy také d-rozměrné kuželové plochy.

Víme, že na charakteristických plochách nelze zadat (libovolné) počáteční podmínky tak, abychom měli zaručenu existenci (a jednoznačnost) řešení daného zobecněného Cauchyova problému v okolí charakteristické plochy. Na to lze nahlížet také tak, že na charakteristické ploše jistým způsobem „rovnice sama šíří informaci o průběhu řešení“, proto na této ploše nelze řešení obecně „předepsat hodnoty“. V Kapitole 4, v paragrafu, který bude věnován vlnové rovnici, si tuto interpretaci znovu připomeneme. Leccos však objasní i následující příklad.

V posledním příkladě tohoto paragrafu se ukážeme souvislost mezi pojmy charakteristické plochy, který jsme v tomto paragrafu zavedli pro lineární rovnicí k-tého řádu, a pojmu charakteristiky (charakteristické křivky), studovanému v paragrafu 1.3 pro kvazilineární rovnicí 1. řádu. Budeme tedy zkoumat lineární rovnici 1. řádu, pro kterou lze oba tyto pojmy zavést.

Příklad 2.3.7 Uvažujme lineární homogenní PDR 1. řádu,

$$\sum_{j=0}^{d} a_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j} = 0\,, \qquad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^{d+1} \text{ omezená oblast}, \quad a_j \in \mathcal{C}\Omega\,. \tag{2.58}$$

Nalezněme nejprve charakteristické směry a plochy této rovnice metodami tohoto paragrafu. Hledáme $\xi \in \mathbb{R}^{d+1}$, $\xi \neq 0$ takové, že

$$\sum_{j=0}^{d} a_j(x)\xi_j = 0\,.$$

Charakteristickým směrem rovnice (2.58) je tedy vektor $\vec{\xi} = \vec{\xi}(x)$, který je v každém bodě $x \in \Omega$ kolmý na vektor $\vec{a}(x) = \big(a_0(x), \ldots, a_d(x)\big)$. Charakteristické plochy S

rovnice (2.58) mají pak tu vlastnost, že v každém bodě $x \in S$ je $\vec{a}(x)$ tečným vektorem plochy S.

Rovnici (2.58) je však také tvaru (1.15), lze tedy pro ni definovat charakteristiky (charakteristické křivky), popsané rovnicemi

$$\frac{d}{ds} x_j(s) = a_j\big(x(s)\big), \quad s \in (\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}, \quad j = 0, \dots, d, \tag{2.59}$$

srov. (1.17). Odtud plyne, že vektor $\vec{a}(x) = \big(a_0(x), \dots, a_d(x)\big)$ je tečným vektorem k charakteristické křivce v jejím bodě $x = x(s)$.

Srovnáním obou přístupů dostaneme, že *charakteristiky* rovnice (2.58) leží v *charakteristické ploše* této rovnice. Protože víme, že každé kalsické řešení rovnice (2.58) je konstantní na charakteristikách, dostáváme odtud další pohled na charakteristické plochy: jsou to plochy, po který se „šíří informace o hodnotách řešení“.

Cvičení 2.3.8 Zkoumejte charakteristiky a charakteristické plochy rovnice

$$u_x + u_y + u_z = 0, \qquad (x, y, z,) \in \mathbb{R}^3,$$

pro neznámou funkci $u = u(x, y, z)$.

2.4 O klasifikaci rovnic 2. řádu

Mějme lineární rovnici 2. řádu v $\mathbb{R}^d$

$$\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \, \partial x_j} + \sum_{j=1}^{d} b_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} + c(x)\, u = f(x) \tag{2.60}$$

Jde-li nám o klasické řešení, předpokládáme dostatečnou hladkost u a tedy můžeme zaměnit smíšené parciální derivace. Tudíž bez újmy na obecnosti je $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$ pro každé x a matice $\mathsf{A} := (a_{ij}(x))_{i,j=1}^{d}$ je reálná, symetrická a proto diagonalizovatelná. Tedy existuje ortogonální matice P a diagonální matice D tak, že $\mathsf{P}^{\mathrm{T}}\mathsf{A}\mathsf{P} = \mathsf{D}$. Připomeňme si, že signatura kvadratické formy určené maticí D je trojice (n, p, q), kde n je počet nulových, p počet kladných a q počet záporných prvků na diagonále D. Dle zákona setrvačnosti kvadratické formy je počet nulových, záporných a kladných prvků na diagonále matice D pevně dán a tedy je signatura dobře definovaná.

Předpokládejme, že jsou koeficienty u členů druhých řádů rovnice (2.60) konstantní, tedy $a_{ij}(x) = a_{ij}$. Definujme $v := u \circ \mathsf{P}$ a položme $y = \mathsf{P}^{\mathrm{T}} x$, pak máme $v(y) = v(\mathsf{P}^{\mathrm{T}} x) = u(\mathsf{P}\mathsf{P}^{\mathrm{T}} x) = u(x)$

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) = \sum_{k=1}^{d} \frac{\partial v}{\partial y_k}(y)\, p_{ik} \quad \text{a} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \sum_{k,h=1}^{d} \frac{\partial^2 v}{\partial y_k \partial y_h}(y)\, p_{ik} p_{jh}$$

Odtud je vidět, že $u(x)$ splňuje rovnici (2.60) právě, když $v(y)$ řeší rovnici jejíž koeficienty u členů druhého řádu jsou prvky matice $D = (d_{ij})_{i,j=1}^d$, neboť

$$\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \, \partial x_j}(x) = \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij} \sum_{k,h=1}^{d} \frac{\partial^2 v}{\partial y_k \partial y_h}(y)\, p_{ik} p_{jh} =$$
$$= \sum_{h,k=1}^{d} \frac{\partial^2 v}{\partial y_k \partial y_h}(y) \underbrace{\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij} p_{ik} p_{jh}}_{d_{ij}}$$

Pro nekonstantní a_{ij} lze provést analogickou substituci pouze lokálně, viz [11].

Definice 2.4.1 (Typ diferenciální rovnice druhého řádu) *Buď matice $D = (d_{ij})_{i,j=1}^d$ jako výše a m její řád. Řekneme, že rovnice* (2.60) *je v bodě x:*

i. eliptická*, jestliže jsou znaménka všech prvků matice D stejná a $m = d$. Typickým zástupcem je Poissonova rovnice: $-\Delta u = f$.*

ii. hyperbolická*, jestliže je $m = d$ a všechna znaménka prvků D jsou stejná až na jedno. Typickým zástupcem je vlnová rovnice: $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f$ (Laplaceův operátor je brán jen vzhledem k prostorovým proměnným).*

iii. parabolická*, jestliže je $m = d - 1$ BÚNO $d_{dd} = 0$, všechna znaménka prvků D jsou stejná a koeficient rovnice* (2.60) *u $\frac{\partial u}{\partial x_d}$ je nenulový. Typickým zástupcem je rovnice vedení tepla: $\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f$ (stejně jako v předchozím případě je $\Delta = \sum_{i=1}^{d-1} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$).*

iv. parabolická v širším slova smyslu*, jestliže $m \le d - 1$.*

v. ultrahyperbolická*, jestliže $m = d$ a alespoň dvě znaménka prvků D jsou kladná a alespoň dvě záporná.*

Cvičení 2.4.2 *Pro $d = 2$ je rovnice* (2.60) *tvaru*

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \, \partial x_2} + c\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \textit{členy nižších řádů} = f$$

Tato rovnice je v bodě x eliptická pokud $b^2 - ac < 0$, parabolická je pro $b^2 - ac = 0$ a hyperbolická, když je $b^2 - ac > 0$.

Př.: Tricomiho rovnice

$$x_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0$$

$x_2 > 0 \ldots$ eliptická, $x_2 < 0 \ldots$ hyperbolická, tedy mění typ při přechodu x_1 osy.

Cvičení 2.4.3 1. Uvažujte lineární PDR druhého řádu s konstantními koeficienty, v $\mathbb{R}^2$, tedy rovnici typu

$$au_{xx} + bu_{xy} + cu_{yy} = f\,, \qquad |a| + |b| + |c| > 0. \tag{2.61}$$

Ukažte, že platí:

- (2.61) je eliptická $\iff$ $b^2 - 4ac < 0$;
- (2.61) je parabolická (event. v širším slova smyslu) $\iff$ $b^2 - 4ac = 0$;
- (2.61) je hyperbolická $\iff$ $b^2 - 4ac > 0$.

2. Uvažujte lineární PDR druhého řádu v kanonickém tvaru (vzhledem k nevyšším derivacím), tedy rovnici pro $u = u(y)$,

$$\sum_{k=1}^{d} \alpha_k(y) \frac{\partial^2 u}{\partial y_k^2} + \sum_{k=1}^{d} \beta_k(y) \frac{\partial u}{\partial y_k} + c(y)\, u = f(y)\,, \qquad \text{kde } \alpha_k(y) \in \{-1, 1, 0\}\,. \tag{2.62}$$

Ukažte, že v každém bodě y lze provést tyto úvahy:

(a) Pokud existuje takový index j, že $\alpha_j \neq 0$, $\beta_j \neq 0$, potom zavedení nové funkce $v = v(y)$ susbtitucí $u = v\, e^{-\frac{\beta_j y_j}{2\alpha_j}}$ (přes stejné indexy nesčítáme, jde o ono konkrétní j) způsobí, že:

- v rovnici pro v nebude člen, odpovídající β_j (odpovídající koeficient bude nulový)
- všechny koeficienty u členů druhého řádu zůstanou beze změny a všechny zbylé koeficienty u členů prvého řádu (s výjimkou výše zmíněného) zůstanou rovněž beze změny

Ta dvojka ve jmenovateli zlomku v exponenciele není překlep. Sledujte její roli při výpočtu.

(b) Pokud existuje takový index j, že $\alpha_j = 0$, $\beta_j \neq 0$, potom zavedení nové funkce $v = v(y)$ susbtitucí $u = v\, e^{-\frac{c y_j}{\beta_j}}$ (přes stejné indexy nesčítáme, jde o ono konkrétní j) způsobí, že:

- v rovnici pro v nebude absolutní člen, tj, člen odpovídající nulté derivaci (koeficientu c)
- všechny koeficienty u členů druhého i prvního řádu zůstanou beze změny

3. Pomocí výše uvedených dvou substitucí ukažte, že každou lineární PDR 2. řádu s konstantními koeficienty lze vhodnými substitucemi převést na jeden z následujících typů:

- Eliptickou rovnici na $-\Delta u + ku = f$. Pro $k = 0$ jde o tzv. Laplace-Poissonovu rovnici, pro $k \neq 0$ o rovnici Helmholtzova typu. Koeficient k, je-li nenulový, obecně nelze „vynulovat“.
- Parabolickou rovnici na $\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u = f$, tj. na rovnici vedení tepla. Všechny parabolické lineární PDR 2. řádu s konstantními koeficienty jsou tedy nějakou rovnicí vedení tepla.
- Hyperbolickou rovnici na $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta u + ku = f$, tj. na vlnovou rovnici. Koeficient k, je-li nenulový, obecně nelze „vynulovat“.

4. Určete typ rovnice, převeďte na kanonický tvar, případně převeďte na jednu z rovnic z předchozího bodu, případně se pokuste vyřešit, pokud se po převedení dostanete na „řešitelný typ“ rovnice.

   (a) $u_{xx} + 2u_{xy} + 2u_{yy} + 4u_{yz} + 5u_{zz} + u_x + u_y = 0$ <u>Řešení:</u> Po provedení substituce $\xi = x$, $\eta = y - x$, $\chi = 2x - 2y + z$ s následným zavedením nové funkce předpisem $u = ve^{-\xi/2}$ dostaneme rovnici $\Delta v = \frac{1}{4} v$. Jde o eliptickou rovnici (Helmholtzova typu).

   (b) $u_{xx} + 4u_{xy} + 8u_{yy} + u_x + u_y = 0$ <u>Řešení:</u> Po provedení substituce $\xi = x$, $\eta = \frac{y}{2} - x$ s následným zavedením nové funkce předpisem $u = ve^{-\xi/2 + \eta/4}$ dostaneme eliptickou rovnici (Helmholtzova typu) $v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} = \frac{5}{16} v$.

   (c) $u_{xx} + 4u_{xy} + 4u_{yy} - u_x - 2u_y = 0$ <u>Řešení:</u> Po provedení substituce $\xi = x$, $\eta = y - 2x$ dostaneme parabolickou rovnici $u_\eta - u_{\xi\xi} = 0$.

   (d) $u_{xx} - 2u_{xy} - 3u_{yy} + u_y = 0$ <u>Řešení:</u> Po provedení substituce $\xi = x$, $\eta = \frac{x}{2} + \frac{y}{2}$ s následným zavedením nové funkce předpisem $u = ve^{\eta/4}$ dostaneme hyperbolickou rovnici $v_{\xi\xi} - v_{\eta\eta} = \frac{3}{16} v$.

   (e) $4u_{xy} - 3u_{yy} + 4u_x - 8u_y - 5u = 0$,
   řešte obecně a poté s podmínkami $u(x, 0) = e^{\frac{x}{2}}$, $u_y(x, 0) = 0$. <u>Řešení:</u> Po provedení substituce $\xi = x + y$, $\eta = x + 2y$ s následným zavedením nové funkce předpisem $u = ve^{2\xi - \frac{3}{2}\eta}$ dostaneme hyperbolickou rovnici $v_{\xi\xi} - 4v_{\eta\eta} = 0$. Její obecné řešení je $v(\xi, \eta) = f(\eta - 2\xi) + g(\eta + 2\xi)$, tedy $u(x, y) = e^{\frac{x}{2} - y}\big(f(x) + g(3x + 4y)\big)$. Okrajové podmínky dají $u(x, y) = e^{\frac{x}{2} - y}(1 + y)$.

5.* A další sada příkladů pro vaše samostatné počítání: v každé oblasti, kde se nemění typ rovnice, najděte její kanonický tvar.

   (a) $y^2 u_{xx} - x^2 u_{yy} = 0$

   (b) $u_{xx} - 2 \sin x \, u_{xy} + (2 - \cos^2 x) \, u_{yy} = 0$

   (c) $x^2 u_{xx} - 2x u_{xy} + u_{yy} = 0$

   (d) $y u_{xx} - x u_{xy} = 0$

   (e) $(1 + x^2) u_{xx} + (1 + y^2) u_{yy} + y u_y = 0$

Kapitola 3

Laplaceova a Poissonova rovnice

3.1 Fundamentální řešení Laplaceovy rovnice

Definice 3.1.1 *Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ neprázdná otevřená množina, $f \in \mathcal{C}(\Omega)$ reálná funkce. Rovnici*

$$-\Delta u = f \qquad v\,\Omega \tag{3.1}$$

pro neznámou funkci u nazýváme Poissonovou (resp. Laplace-Poissonovou) rovnicí *v Ω. Je-li $f \equiv 0$ v Ω, mluvíme speciálně o* Laplaceově rovnici

$$\Delta u = 0 \qquad v\,\Omega\,. \tag{3.2}$$

Zatím neříkáme nic o tom, pro jaké funkce f, případně za jakých podmínek, kladených na oblast Ω, takové u existuje či kolik takových funkcí k zadané funkci f lze nalézt. Je však jasné, že pokud budeme požadovat $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, bude nutně $\Delta u = f \in \mathcal{C}(\Omega)$. Spojitost f v Ω je tedy nutnou podmínkou pro to, aby existovalo řešení u rovnice (3.1) v *klasickém* slova smyslu.

Ještě dříve, než začneme zkoumat otázky existence (případně jednoznačnosti) řešení rovnic typu (3.1), budeme se věnovat studiu vlastností funkce $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, splňující v každém bodě $x \in \Omega$ rovnici (3.2).

Definice 3.1.2 *Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ neprázdná otevřená množina. Řekneme, že $u : \Omega \to \mathbb{R}$ je* harmonická v Ω *(píšeme $u \in \mathcal{H}(\Omega)$), pokud $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ a $\Delta u(x) = 0$ pro všechna $x \in \Omega$ (tj. u bodově řeší Laplaceovu rovnici v Ω v klasickém slova smyslu).*

Poznámka 3.1.3 Existují i jiné definice pojmu harmonické funkce, které například vyžadují pouze spojitost u a (pak tedy nutně) splnění Laplaceovy rovnice (3.2) v nějakém jiném než bodovém smyslu.

Příklad 3.1.4 Uvedeme nyní některé základní (vesměs důležité) příklady harmonických funkcí. Nebude-li řečeno jinak, budeme v těchto příkladech symbolem Ω značit naprázdnou otevřenou množinu v $\mathbb{R}^d$.

(i) Polynomy stupně nejvýše jedna (tzv. *afinní funkce*), tj. funkce tvaru $u(x) = \sum_{j=1}^{d} a_j x_j + b$, kde a_j, $b \in \mathbb{R}$, $x = (x_1, \dots, x_d)$, jsou harmonické v libovolné $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, speciálně tedy totéž tvrzení platí pro konstanty (tj. konstantní funkce).

(ii) Je-li $\Omega \subset \mathbb{R}$ neprázdná otevřená množina, pak je Ω nejvýše spočetným sjednocením otevřených disjunktních intervalů, $\Omega = \cup_j (a_j, b_j)$. Pokud je $u \in \mathcal{H}(\Omega)$, tedy $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ a $u''(x) = 0$ pro všechna $x \in \Omega$, existují konstanty α_j, $\beta_j \in \mathbb{R}$ takové, že $u(x) = \alpha_j x + \beta_j$ pro $x \in (a_j, b_j)$. To spolu s předchozím příkladem ukazuje, že jedinými harmonickými funkcemi v $\mathbb{R}$ jsou afinní funkce. To, že se (často mlčky) při studiu harmonických funkcí předpokládá $d \geq 2$ tedy nevnáší do takového studia téměř žádnou újmu na obecnosti.

(iii) Funkce $u(x, y) = x^2 - y^2$ je harmonická v libovolné $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Obecně nazýváme funkci $u : \Omega \to \mathbb{R}$ *harmonickým polynomem* v Ω, pokud u je polynom a $u \in \mathcal{H}(\Omega)$. Zřejmě platí: jsou-li $a_j \in \mathbb{R}$ taková, že $\sum_{j=1}^{d} a_j = 0$, je funkce $u(x) := \sum_{j=1}^{d} a_j x_j^2$ harmonickým polynomem v libovolně naprázdné otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{R}^d$.

(iv) Existuje úzká souvislost mezi pojmem funkce *harmonické v* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ a *holomorfní v* $\Omega \subset \mathbb{C}$ (při obvyklém bodovém ztotožnění $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{C}$). Přesněji: buď $F = u + iv$ komplexní funkce komplexní proměnné, holomorfní v otevřené neprázdné množině $\Omega_{\mathbb{C}} \subset \mathbb{C}$. Označme $\Omega =: \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ;\ z = x + iy \in \Omega_{\mathbb{C}}\}$. Nechť funkce $u = u(x, y)$, $v = v(x, y) \in \mathcal{C}^2(\Omega)$. Potom z Cauchy-Riemannových podmínek pro F (tj. z identit $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$) plyne, že v bodech Ω platí

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) = 0\,,$$

neboť pro $v \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ jsou smíšené derivace druhého řádu záměnné. Podobně $\Delta v = 0$. V uvedeném smyslu tedy platí: složky holomorfní funkce (jsou-li dostatečně hladké) jsou harmonické.

(v) Buď $\xi \in \mathbb{R}^d$ pevný bod. Potom funkce

$$u(x) = \frac{1}{|x - \xi|^{d-2}} \qquad \text{pro } d \geq 3\,, \tag{3.3}$$

$$u(x) = \ln |x - \xi| = -\ln \frac{1}{|x - \xi|} \qquad \text{pro } d = 2\,, \tag{3.4}$$

jsou harmonické v libovolné oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, neobsahující bod ξ. Speciálně jsou uvedené funkce harmonické v $\mathbb{R}^d \setminus \{\xi\}$.

(vi) Buďte ξ, $y \in \mathbb{R}^d$ pevné body, $d \geq 2$. Potom funkce

$$u(x) = \frac{|\xi - y|^2 - |x - y|^2}{|x - \xi|^d} \tag{3.5}$$

je harmonická v libovolné oblasti, neobsahující bod ξ, speciálně je harmonická v $\mathbb{R}^d \setminus \{\xi\}$.

Poznámka 3.1.5 (pro čtenáře znající teorii distribucí) Funkce (3.3) (pro $d > 2$) resp. (3.4) (pokud $d = 2$) pro volbu $\xi = 0$ tedy splňují Laplaceovu rovnici bodově všude v $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, přičemž v bodě 0 nejsou definovány. Pokud se týká jejich chování v okolí tohoto bodu, lze ukázat, že tzv. ditributivní derivace (derivace ve smyslu distribucí v $\mathbb{R}^d$) těchto funkcí je až na multiplikativní konstantu, závisející pouze na dimenzi prostoru, rovna Diracově distribuci δ. Vhodný násobek těchto funkcí, konkrétně

$$E(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{(d-2)\varkappa_d} \dfrac{1}{|x|^{d-2}} & \text{pro } d \geq 3\,, \\[2ex] \dfrac{1}{2\pi} \ln \dfrac{1}{|x|} & \text{pro } d = 2\,, \end{cases} \tag{3.6}$$

pak splňuje ve smyslu distribucí rovnost $-\Delta E = \delta$. Symbolem $\varkappa_d$ zde značíme povrch jednotkové koule v $\mathbb{R}^d$. Lze ukázat (viz Appendix), že $\varkappa_d = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}$, kde Γ je Eulerova gamma funkce.

Výše uvedená vlastnost funkcí definovaných (3.6) (zejména tedy volba příslušných multiplikativních konstant) odůvodňuje následující definici.

Definice 3.1.6 (Elementární řešení Laplaceovy rovnice.) *Funkci* $E \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$*, definovanou předpisem* (3.6)*, nazýváme* elementárním řešením Laplaceovy rovnice *(případně* elementárním řešením Laplaceova operátoru*).*

3.2 Věta o třech potenciálech

V tomto paragrafu odvodíme jistou integrální reprezentaci obecné funkce $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$, kde $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 2$ je omezená oblast s dostatečně hladkou hranicí $\partial\Omega$. Pojem „dostatečně hladká hranice“ je poněkud vágní, proto raději hned dodejme (i když také poměrně vágně), že podstatné pro naše úvahy bude, aby na Ω platila Gauss-Ostrogradského věta, tedy zejména aby ve skoro všech bodech $x \in \partial\Omega$ (ve smyslu $(d-1)$-rozměrné míry na $\partial\Omega$) existoval jednotkový vektor vnější normály k Ω v bodě x. Oblastmi s „dostatečně hladkými“ hranicemi (ve výše uvedeném smyslu) jsou například oblasti s lipschitzovskou hranicí[1], $\Omega \in \mathcal{C}^{0,1}$.

Věta 3.2.1 (O třech potenciálech) *Buď* $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *omezená oblast s „dostatečně“ hladkou hranicí,* $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$*. Potom pro každé* $y \in \Omega$ *je*

$$u(y) = -\int_\Omega \Delta u(x)\, U(x-y)\,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu}(x)\, U(x-y)\,\mathrm{d}S_x - \int_{\partial\Omega} u(x)\, \frac{\partial U}{\partial \nu}(x-y)\,\mathrm{d}S_x\,, \tag{3.7}$$

[1]Přesnou definici je možno nalézt v Appendixu.

kde $U(x)$ je elementární řešení Laplaceovy rovnice, viz (3.6).

Důkaz. Již víme, že funkce $U(x-y)$ (jako funkce proměnné x) je harmonická v každé oblasti, která neobsahuje bod y. Speciálně jsou tedy funkce $\frac{1}{|x|^{d-2}}$ resp. $\ln\frac{1}{|x|}$ harmonické v oblasti dimenze $d \geq 3$ resp. $d = 2$, pokud tato oblast neobsahuje bod 0.

Věnujme se nyní vlastnímu důkazu. Pro dimenzi $d \geq 3$ věta tvrdí:

$$u(y) = \frac{1}{\varkappa_d(d-2)}\Bigg(-\int_\Omega \frac{\Delta u(x)}{|x-y|^{d-2}}\,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial\nu}(x)\frac{1}{|x-y|^{d-2}}\,\mathrm{d}S_x - \int_{\partial\Omega}\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{1}{|x-y|^{d-2}}\right)u(x)\,\mathrm{d}S_x\Bigg). \tag{3.8}$$

Dodejme, že derivování podle vektoru vnější normály ν se týká proměnné x. Bez újmy na obecnosti dokážme tvrzení pouze pro $y = 0$ ($y \neq 0$ dostaneme posunutím). Dále předpokládáme, že bod 0 leží v Ω. Protože integrál vlevo v následující rovnosti existuje jako Lebesgueův (uvědomte si to), máme

$$\int\limits_\Omega \frac{\Delta u(x)}{|x|^{d-2}}\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0+}\int\limits_{\Omega\setminus B_\varepsilon(0)}\frac{\Delta u(x)}{|x|^{d-2}}\,\mathrm{d}x,$$

kde $B_\varepsilon(0)$ značí kouli se středem v bodě 0 o poloměru ε. Pokud integrujeme přes $\Omega\setminus B_\varepsilon(0)$, můžeme bez obav použít druhou Greenovu větu (integrovaná funkce je spojitá až do hranice $\Omega\setminus B_\varepsilon(0)$, která je dostatečně hladká). Proto lze pokračovat

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\Bigg(\int_{\Omega\setminus B_\varepsilon(0)} u(x)\Delta\left(\frac{1}{|x|^{d-2}}\right)\mathrm{d}x - \int_{\partial(\Omega\setminus B_\varepsilon(0))}u(x)\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{1}{|x|^{d-2}}\right)\mathrm{d}S_x + \int_{\partial(\Omega\setminus B_\varepsilon(0))}\frac{1}{|x|^{d-2}}\frac{\partial u}{\partial\nu}(x)\,\mathrm{d}S_x\Bigg).$$

První člen je nulový, neboť $\frac{1}{|x|^{d-2}}$ je harmonická na $\Omega\setminus B_\varepsilon(0)$. Zbylé dva integrály přes $\partial(\Omega\setminus B_\varepsilon(0))$ rozdělíme zvlášť na integrál přes $\partial\Omega$ a $\partial B_\varepsilon(0)$ (pozor na orientaci). Na členy, ve kterých probíhá integrace přes $\partial\Omega$, nemá limita přes ε vliv, a stačí proto vyšetřit chování členů, kde integrace probíhá přes $\partial B_\varepsilon(0)$. Ukážeme, že

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{\partial B_\varepsilon(0)}\frac{1}{|x|^{d-2}}\frac{\partial u}{\partial\nu}(x)\,\mathrm{d}S_x = 0\,.$$

Platí totiž odhad (velikost x je na $\partial B_\varepsilon(0)$ rovna ε)

$$\left|\int_{\partial B_\varepsilon(0)}\frac{1}{|x|^{d-2}}\frac{\partial u}{\partial\nu}(x)\,\mathrm{d}S_x\right| \leq \max_{x\in\partial B_\varepsilon(0)}\left|\frac{\partial u}{\partial\nu}(x)\right|\varepsilon\int_{\partial B_\varepsilon(0)}\frac{\mathrm{d}S_x}{\varepsilon^{d-1}},$$

kde integrál vpravo je přesně $\varkappa_d$, tj. povrch jednotkové sféry v d dimenzích. Abychom zjistili, čemu se rovná limita výrazu $\int_{\partial B_\varepsilon(0)} u(x)\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{1}{|x|^{d-2}}\right) dS_x$, vypočteme nejprve normálovou derivaci $\frac{1}{|x|^{d-2}}$ (ν je jednotkový vektor a kvůli orientaci vnější normály $\nu \upharpoonleft\!\downharpoonright x$, tedy $x\cdot\nu = -|x|$):

$$\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{1}{|x|^{d-2}}\right) = \nabla\frac{1}{|x|^{d-2}}\cdot\nu = -(d-2)\frac{1}{|x|^d}\,x\cdot\nu = (d-2)\frac{1}{|x|^{d-1}}\,.$$

Proto

$$-\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{\partial B_\varepsilon(0)} u(x)\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{1}{|x|^{d-2}}\right)\mathrm{d}S_x = -\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{\partial B_\varepsilon(0)} u(x)(d-2)\frac{\mathrm{d}S_x}{\varepsilon^{d-1}},$$

což rozepíšeme jako

$$-\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{\partial B_\varepsilon(0)} u(0)(d-2)\frac{\mathrm{d}S_x}{\varepsilon^{d-1}} - \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{\partial B_\varepsilon(0)} \big(u(x)-u(0)\big)\,(d-2)\frac{\mathrm{d}S_x}{\varepsilon^{d-1}}\,.$$

První integrál konverguje k $-u(0)(d-2)\varkappa_d$ a druhý konverguje k nule díky spojitosti $u(x)$. Konečně tedy (nesmíme zapomenout na integrály přes $\partial\Omega$, které jsme získali z $\partial(\Omega\setminus B_\varepsilon(0))$):

$$\int_\Omega \frac{\Delta u(x)}{|x|^{d-2}}\,\mathrm{d}x = -\int_{\partial\Omega} u(x)\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{1}{|x|^{d-2}}\right)\mathrm{d}S_x + \int_{\partial\Omega}\frac{1}{|x|^{d-2}}\frac{\partial u}{\partial\nu}(x)\,\mathrm{d}S_x - u(0)(d-2)\varkappa_d,$$

z čehož po jednoduché úpravě dostaneme dokazované tvrzení (3.8) pro $u(0)$. Kdybychom vystartovali z výrazu $\int_\Omega \Delta u(x)\ln\frac{1}{|x|}\,\mathrm{d}x$ a použili stejných úprav jako výše, provedli bychom důkaz pro dimenzi $d=2$. Čtenáři doporučujeme si to jako cvičení provést. $\square$

Poznámky. Diskuse: Tak hladká hranice Ω, aby platila Gauss-Ostrogradského věta. Tři integrály v (3.7) se po řadě nazývají objemový potenciál s hustotou $-\Delta u$, potenciál jednovrstvy s hustotou $\frac{\partial u}{\partial\nu}$, potenciál dvojvrstvy s hustotou u. Je tu souvislost s konvolucí, konvolucí distribucí.

Důsledek: $\mathcal{C}^2$ řešení Laplaceovy rovnice už jsou nutně třídy $\mathcal{C}^\infty$. Viz následující věta.

Věta 3.2.2 (Věta o regularitě) *Buď $u\in\mathcal{C}^2(\Omega)$, kde $\Omega\subset\mathbb{R}^d$ je oblast. Nechť $\Delta u = 0$ v Ω. Potom $u\in\mathcal{C}^\infty(\Omega)$.*

Důkaz. Jen poznámky: Pro každý pevný vnitřní bod $y\in\Omega$ opíšeme kouli $B_R(y)\subset\subset\Omega$, pro ni napíšeme větu o tří potenciálech, využijeme $\Delta u = 0$ a vlastnosti integrálu s parametrem. Důkaz: doplnit. $\square$

3.3 Dirichletova úloha pro Laplaceovu rovnici na kouli

Nejprve zformulujeme obecnou Dirichletovu úlohu pro Laplace-Poissonovu rovnici (tedy rovnici „s pravou stranou") a budeme se zabývat otázkou jednoznačnosti (klasického) řešení této úlohy. Poté zodpovíme kladně otázku existence řešení zmíněné úlohy pro (pouze) Laplaceovu rovnici na kouli v $\mathbb{R}^d$. Součástí této kladné odpovědi bude rovněž explicitní vzorec pro nalezení řešení a výrok o stabilitě takového řešení.

Definice 3.3.1 (Dirichletova úloha pro Laplace-Poissonovu rovnici) *Buď* $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *neprázdná otevřená množina. Buďte dále* $\varphi \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$ *a* $f \in \mathcal{C}(\Omega)$. *Řekneme, že* u *je* klasickým řešením Dirichletovy úlohy pro Laplace-Poissonovu rovnici (s daty φ, f) v Ω, *pokud* $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cup \mathcal{C}(\overline{\Omega})$,*a*

$$\Delta u(x) = f(x) \qquad \text{pro všechna } x \in \Omega\,, \tag{3.9}$$
$$u(x) = \varphi(x) \qquad \text{pro všechna } x \in \partial\Omega\,. \tag{3.10}$$

Řešení úlohy (3.9)–(3.10) na *omezené* otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, pro $f \equiv 0$, pokud existuje, má následující důležitou vlastnost.

==

Zde chybí princip maxima pro Laplaceův operátor a jako důsledek věta o jednoznačnosti řešení úlohy (3.9)–(3.10) na omezené otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{R}^d$.

==

Pro kouli lze klasické řešení Dirichletovy úlohy psát explicitně. Toto explicitní řešení (ve tvaru tzv. Poissonova vzorce) nyní odvodíme.

Základem Poissonova vzorce je následující lemma.

Lemma 3.3.2 *Buď* $B_R(0) \subset \mathbb{R}^d$ *koule se středem* 0 *a poloměrem* $R > 0$, $d \geq 3$. *Buď dále* $u \in \mathcal{C}^2(\overline{B_R(0)})$, *taková, že* $\Delta u = 0$ *v* $B_R(0)$. *Potom pro všechna* $x \in B_R(0)$ *je*

$$u(x) = \frac{1}{\varkappa_d R} \int\limits_{\partial B_R(0)} u(\xi) \frac{R^2 - |x|^2}{|x-\xi|^d} \, \mathrm{d}S(\xi), \tag{3.11}$$

kde $\varkappa_d = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}$ *je povrch jednotkové sféry v dimenzi* d.

Poznámka 3.3.3 Vztah (3.11) je tedy nutnou podmínkou pro to, aby funkce uvedené hladkosti byla řešením Laplaceovy rovnice na kouli. Zároveň tento vztah říká, že hodnoty takové (harmonické, dostatečně hladké) funkce u uvnitř koule $B_R(0)$ lze vyjádřit pomocí hodnot funkce na hranici této koule. Vzhledem k tomu, že k existenci integrálu vpravo v (3.11) není nutné, aby $u \in \mathcal{C}^2(\partial B_R(0))$, vzniká přirozená otázka, jaké vlastnosti bude mít funkce u, definovaná předpisem

$$u(x) = \frac{1}{\varkappa_d R} \int\limits_{\partial B_R(0)} \varphi(\xi) \frac{R^2 - |x|^2}{|x-\xi|^d} \,\mathrm{d}S(\xi), \tag{3.12}$$

pro (např.) $\varphi \in \mathcal{C}(\partial B_R(0))$. Skutečně lze dokázat, že takto definovaná funkce je klasickým řešením Dirichletovy úlohy pro Laplaceovu rovnici na kouli, s hraničními hodnotami $\varphi \in \mathcal{C}(\partial B_R(0))$. Příslušná věta byla součástí přednášky. Zde prezentované lemma tvoří k této větě jakousi komplementární, motivační část, ukazující, že (Poissonův) vzorec (3.12) „nespadl z nebe“.

Dokažme nyní Lemma 3.3.2.

Důkaz Lemmatu 3.3.2. Použijeme větu o třech potenciálech pro $u \in \mathcal{C}^2(\overline{B_R(0)})$ (odtud hladkost, požadovaná na u), $d \geq 3$:

$$\begin{aligned} u(x) = \frac{1}{(d-2)\varkappa_d} \Bigg(& - \underbrace{\int_{B_R(0)} \frac{\Delta u(\xi)}{|x-\xi|^{d-2}} \,\mathrm{d}\xi}_{=0} + \int_{\partial B_R(0)} \frac{\partial u}{\partial \nu}(\xi) \frac{1}{|x-\xi|^{d-2}} \,\mathrm{d}S(\xi) \\ & - \int_{\partial B_R(0)} u(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{1}{|x-\xi|^{d-2}} \right) \mathrm{d}S(\xi) \Bigg). \end{aligned} \tag{3.13}$$

První integrál je nulový, protože $\Delta u = 0$ v $B_R(0)$. Třetí integrál pracuje s hodnotami funkce u na množině $\partial B_R(0)$, je tedy stejného typu jako integrál vpravo v (3.11). Druhý integrál způsobuje jisté obtíže, protože pracuje s hodnotami $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ na množině $\partial B_R(0)$, které se vpravo v (3.11) nevyskytují. Naším cílem bude nyní tento integrál nějakým vhodným způsobem přepsat, abychom tuto obtíž odstranili. Využijeme k tomu druhou Greenovu větu, ze které plyne, že pro funkce v, $w \in \mathcal{C}^1(\overline{B_R(0)})$ je

$$\int\limits_{B_R(0)} (v \Delta w - w \Delta v) \,\mathrm{d}x = \int\limits_{\partial B_R(0)} v \frac{\partial w}{\partial \nu} \,\mathrm{d}S - \int\limits_{\partial B_R(0)} w \frac{\partial v}{\partial \nu} \,\mathrm{d}S\,. \tag{3.14}$$

Položíme $v = u$ a pokusíme se nalézt $w \in \mathcal{C}^1(\overline{B_R(0)})$ takovou, že $\Delta w = 0$ v $B_R(0)$. Pro takovou volbu funkcí v, w plyne z (3.14) rovnost

$$\int\limits_{\partial B_R(0)} u(\xi) \frac{\partial w}{\partial \nu}(\xi) \,\mathrm{d}S(\xi) = \int\limits_{\partial B_R(0)} \frac{\partial u}{\partial \nu}(\xi)\, w(\xi) \,\mathrm{d}S(\xi)\,, \tag{3.15}$$

což umožní nahradit integrál, ve kterém vystupuje $\frac{\partial u}{\partial \nu}(\xi)$, integrálem, ve kterém vystupuje $u(\xi)$. Zbývá najít vhodnou funkci w. Porovnáme-li druhý integrál v (3.13) s pravou stranou (3.15), mohli bychom dojít k názoru, že by touto funkcí mohla být funkce $w(\xi) = \frac{1}{|x-\xi|^{d-2}}$. Tato funkce však (pro pevné $x \in B_R(0)$) není harmonická (v proměnné ξ) v celém $B_R(0)$, jak je nutné. Použijeme proto (podobnou) funkci $w(\xi) = c \cdot \frac{1}{|x'-\xi|^{d-2}}$ s vhodně zvoleným bodem $x' \in \mathbb{R}^d \setminus \overline{B_R(0)}$ a vhodnou konstantou $c \in \mathbb{R}$. Taková funkce splňuje podmínku $w \in \mathcal{C}^1(\overline{B_R(0)})$ a $\Delta w = 0$ v $B_R(0)$ a lze ji použít v identitě (3.15).

K nalezení bodu $x' \in \mathbb{R}^d \setminus \overline{B_R(0)}$, který je „vhodně přiřazen“ bodu $x \in B_R(0)$ použijeme kulovou inverzi: Buď $x \in B_R(0)$, $x = (x_1, \ldots, x_d) \neq 0$. Řekneme, že bod $x' = (x'_1, \ldots, x'_d) \in \mathbb{R}^d \setminus \overline{B_R(0)}$ je kulově inverzní k bodu x (vzhledem ke kouli $B_R(0)$), pokud

$$x'_k = x_k \frac{R^2}{|x|^2}, \quad k = 1, \ldots, d, \tag{3.16}$$

tedy (kreslete si) pokud x' leží na polopřímce vycházející ze středu koule $B_R(0)$ a procházející bodem x, a navíc platí

$$|x| \cdot |x'| = R^2. \tag{3.17}$$

Pro kulově inverzní body lze navíc poměrně jednoduše dokázat následující identita: jsou-li $x \in B_R(0)$, $x \neq 0$, a x' kulově inverzní k x vzhledem ke kouli $B_R(0)$, potom

$$|x' - \xi| = \frac{R}{|x|}|x - \xi|, \quad \forall \xi \in \partial B_R(0). \tag{3.18}$$

(Návod k důkazu (3.18): umocněte (3.18) na druhou a použijte (3.17)). Položíme nyní pro $x \neq 0$,

$$w(\xi) = \frac{1}{|x' - \xi|^{d-2}} \frac{R^{d-2}}{|x|^{d-2}} \quad \left(\overset{(3.18)}{=} \frac{1}{|x - \xi|^{d-2}} \right). \tag{3.19}$$

Tato funkce je harmonická v $B_R(0)$, protože bod x' leží mimo $B_R(0)$, navíc je $w \in \mathcal{C}^2(\overline{B_R(0)})$. S použitím (3.15) a (3.19) dostaneme z (3.13):

$$u(x) = \frac{1}{(d-2)\varkappa_d} \int_{\partial B_R(0)} u(\xi) \underbrace{\frac{\partial}{\partial \nu(\xi)} \left(\frac{1}{|x' - \xi|^{d-2}} \frac{R^{d-2}}{|x|^{d-2}} - \frac{1}{|x - \xi|^{d-2}} \right)}_{:= A_d} \mathrm{d}S(\xi). \tag{3.20}$$

Zbývá v A_d spočítat příslušné normálové derivace a poté přejít k původní proměnné x. Máme:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \nu(\xi)} \left(\frac{1}{|x - \xi|^{d-2}} \right) &= \nabla_\xi \left(|x - \xi|^{2-d} \right) \cdot \nu(\xi) = \frac{2-d}{2} |x - \xi|^{-d} \, 2(x - \xi)\,(-1) \cdot \nu(\xi) \\ &= (d-2) \frac{x - \xi}{|x - \xi|^d} \cdot \frac{\xi}{R}, \end{aligned}$$

neboť $\nu(\xi) = \frac{\xi}{R}$ pro $\xi \in \partial B_R(0)$. Podobně

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\nu(\xi)}\left(\frac{1}{|x'-\xi|^{d-2}}\frac{R^{d-2}}{|x|^{d-2}}\right) &= (d-2)\frac{R^{d-2}}{|x|^{d-2}}\frac{x'-\xi}{|x'-\xi|^d}\cdot\frac{\xi}{R} \\ &\overset{(3.16),(3.18)}{=} (d-2)\frac{R^{d-2}}{|x|^{d-2}}\frac{x\frac{R^2}{|x|^2}-\xi}{\frac{R^d}{|x|^d}|x-\xi|^d}\cdot\frac{\xi}{R} \\ &= (d-2)\frac{R^2x-|x|^2\xi}{R^2|x-\xi|^d}\cdot\frac{\xi}{R}\,.\end{aligned}$$

Celkově je, pro $\xi \in \partial B_R(0)$,

$$\begin{aligned}A &= \frac{d-2}{R^2|x-\xi|^d}\left(R^2x-|x|^2\xi-R^2x+R^2\xi\right)\cdot\frac{\xi}{R} = (d-2)\frac{R^2-|x|^2}{R^2|x-\xi|^d}\cdot\underbrace{\frac{\xi\cdot\xi}{R}}_{=\frac{R^2}{R}} \\ &= (d-2)\frac{R^2-|x|^2}{R|x-\xi|^d}\,,\end{aligned}$$

a tedy, dle (3.20),

$$u(x) = \frac{1}{\varkappa_d R}\int\limits_{\partial B_R(0)} u(\xi)\frac{R^2-|x|^2}{|x-\xi|^d}\,\mathrm{d}S(\xi)\,, \qquad x \in B_R(0)\setminus\{0\}\,, \tag{3.21}$$

(bod $x = 0$ jsme vyloučili v okamžiku, kdy jsme začali používat kulovou inverzi). Funkce vpravo v (3.21) je však spojitá (jako funkce proměnné x) na kompaktním okolí $\overline{\mathcal{U}_\varepsilon(0)}$ – integrabilní majorantou spojité funkce na kompaktní množině je vhodná konstanta. Vztah (3.21) tedy platí i pro $x = 0$, cbd. □

Poznámka 3.3.4 Jako bonus dostáváme ze vztahu (3.21) pro $x = 0$ identitu

$$u(0) = \frac{1}{\varkappa_d R}\int\limits_{\partial B_R(0)} u(\xi)\frac{R^2}{|\xi|^d}\,\mathrm{d}S(\xi) = \frac{1}{\varkappa_d R^{d-1}}\int\limits_{\partial B_R(0)} u(\xi)\,\mathrm{d}S(\xi)\,, \tag{3.22}$$

což je vlastnost průměru pro harmonické funkce.

3.3.1 Poissonův vzorec ve dvou dimenzích

Odvoďme analogii vztahu (3.11) ve dvou dimenzích. Buď $B_R(0) \subset \mathbb{R}^2$ kruh se středem 0 a poloměrem $R > 0$. Buď dále $u \in \mathcal{C}^2(\overline{B_R(0)})$ taková, že $\Delta u = 0$ v $B_R(0)$. Potom věta o třech potenciálech dává pro tuto funkci

$$u(x) = -\frac{1}{2\pi}\int_{\partial B_R(0)}\frac{\partial u}{\partial\nu}(\xi)\ln|x-\xi|\,\mathrm{d}\gamma(\xi) + \frac{1}{2\pi}\int_{\partial B_R(0)} u(\xi)\frac{\partial}{\partial\nu}\Big(\ln|x-\xi|\Big)\,\mathrm{d}\gamma(\xi)\,, \tag{3.23}$$

kde uvedené integrály jsou křivkovými integrály přes obvod kruhu $B_R(0)$. Postupujeme zcela analogicky jako v důkazu lemmatu 3.3.2: definujeme bod kruhově inverzní k bodu $x \in B_R(0)$, $x \neq 0$, splňující (3.16)–(3.18), a pomocnou funkci

$$w(\xi) = \ln\left(\frac{|x|}{R}|x' - \xi|\right) = \ln|x| - \ln R + \ln|x' - \xi|\,,$$

pro kterou tedy platí (3.15). Navíc z předchozího vztahu plyne

$$\frac{\partial}{\partial\nu(\xi)} w(\xi) = \frac{\partial}{\partial\nu(\xi)}\Big(\ln|x' - \xi|\Big)\,. \tag{3.24}$$

Odtud plyne analogie vztahu (3.20), neboli

$$u(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\partial B_R(0)} u(\xi)\,\underbrace{\frac{\partial}{\partial\nu(\xi)}\Big(\ln|x-\xi| - \ln|x'-\xi|\Big)}_{:=A_2}\,\mathrm{d}\gamma(\xi)\,. \tag{3.25}$$

Rutinní (doufejme) výpočty dále dají

$$\frac{\partial}{\partial\nu(\xi)}\Big(\ln|x-\xi|\Big) = \frac{1}{|x-\xi|}\nabla_\xi\Big(|x-\xi|\Big)\cdot\frac{\xi}{R} = -\frac{(x-\xi)\cdot\xi}{R|x-\xi|^2} = \frac{R^2 - x\cdot\xi}{R|x-\xi|^2}\,,$$

a podobně

$$\frac{\partial}{\partial\nu(\xi)}\Big(\ln|x'-\xi|\Big) = \frac{R^2 - x'\cdot\xi}{R|x'-\xi|^2} = \frac{R^2 - x\frac{R^2}{|x|^2}\cdot\xi}{R\frac{R^2}{|x|^2}|x-\xi|^2} = \frac{|x|^2 - x\cdot\xi}{R|x-\xi|^2}\,.$$

Proto $A_2 = \frac{R^2-|x|^2}{R|x-\xi|^2}$ a, uvážíme-li navíc, že $\varkappa_2 = 2\pi$, dostaneme z (3.25)

$$u(x) = \frac{1}{\varkappa_2 R}\int\limits_{\partial B_R(0)} u(\xi)\frac{R^2 - |x|^2}{|x-\xi|^2}\,\mathrm{d}\gamma(\xi)\,, \tag{3.26}$$

nejprve pouze pro $x \in B_R(0)\setminus\{0\}$, stejnou úvahou jako výše však ukážeme platnost (3.26) i pro $x = 0$.

Všimněte si, že vztah (3.26) je speciálním případem vztahu (3.11) pro $d = 2$ (s konvencí, že plošný integrál se pro $d = 2$ chápe jako křivkový integrál). V tomto smyslu tedy platí (3.11) pro $d \geq 2$. Zkuste si jako cvičení rozmyslet, jak by tomu bylo v dimenzi $d = 1$.

Cvičení 3.3.5 *Vyjádřete křivkový integrál* (3.26) *pomocí vhodné (polární) parametrizace jako jednorozměrný integrál přes interval* $(0, 2\pi)$. *Hodnoty funkce* u *vyjádřete také v polárních souřadnicích.*

Návod: Použijeme parametrizaci obvodu kruhu $\partial B_R(0)$ ve formě $\xi_1 = R\cos\alpha$, $\xi_2 = R\sin\alpha$, $\alpha \in (0, 2\pi)$. Metrický člen je $\sqrt{\left(\frac{\partial \xi_1}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial \xi_2}{\partial \alpha}\right)^2} = R$. Označíme dále $g(\alpha) = u(R, \alpha) = u(\xi_1, \xi_2)$ hodnoty funkce u na obvodu kruhu a, pro $x \neq 0$, $u(x) = u(r, \beta)$ hodnoty funkce uvnitř kruhu $B_R(0)$, tj. pro $x_1 = r\cos\beta$, $x_2 = r\sin\beta$, $r \in (0, R)$, $\beta \in (0, 2\pi)$. Pak $|x^2| = r^2$, $|x-\xi|^2 = (R\cos\alpha - r\cos\beta)^2 + (R\sin\alpha - r\sin\beta)^2 = R^2 - 2rR\cos(\beta-\alpha) + r^2$, a

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\partial B_R(0)} u(\xi) \frac{R^2 - |x|^2}{R|x-\xi|^2} \, \mathrm{d}\gamma(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\alpha) \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR\cos(\beta - \alpha) + r^2} \, \mathrm{d}\alpha = u(r, \beta) \,. \tag{3.27}$$

Zvlášť ke potřeba si rozmyslet případ $x = 0$ resp. $r = 0$. Na vztah (3.27) narazíme ještě při řešení Laplaceovy rovnice na kruhu tzv. Fourierovou metodou rozdělení proměnných.

Tímto jsme obdrželi předpis pro řešení Dirichletovy úlohy na kouli se středem v bodě nula a poloměrem R. Zbývá zformulovat větu o řešení Dirichletovy úlohy a ukázat, že nalezená funkce je skutečně řešením naší úlohy.

Věta 3.3.6 (Řešení Dirichletovy úlohy na kouli) *Buď $B_R(x_0)$ koule v $\mathbb{R}^d$, $\varphi \in \mathcal{C}(S_R(x_0))$. Definujme*

$$u(x) := \begin{cases} \varphi(x) & \text{pro } x \in S_R(x_0)\,, \\[2ex] \dfrac{1}{\varkappa_d R} \displaystyle\int_{S_R(x_0)} \varphi(\xi) \, \frac{R^2 - |x - x_0|^2}{|x-\xi|^d} \, \mathrm{d}S_\xi & \text{pro } x \in B_R(x_0)\,. \end{cases} \tag{3.28}$$

Potom $u \in \mathcal{C}^\infty(B_R(x_0)) \cap \mathcal{C}(\overline{B_R(x_0)})$ a řeší klasickou Dirichletovu úlohu na kouli $B_R(x_0)$. Navíc platí $\|u\|_\infty \leq \|\varphi\|_\infty$.

Důkaz. Poznámky: Normy $\|\cdot\|_\infty$ jsou supremové normy v prostoru příslušných spojitých funkcí. Integrál ve (3.28) se nazývá Poissonův integrál. Navíc platí, že klasické řešení Dirichletovy úlohy na kouli je určeno jednoznačně (označte w rozdíl dvou řešení a upravte $\int_\Omega \nabla w \cdot \nabla w$ pomocí Greenovy věty). Z tvaru Poissonova integrálu rovněž vidíme, že platí implikace $\varphi \geq 0 \Rightarrow u \geq 0$. Doplnit podrobnosti, zejména nabývání O.P. □

3.4 Věty o střední hodnotě

Věta 3.4.1 (Věta o střední hodnotě (o průměru)) *Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ oblast, $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, $\Delta u = 0$ v Ω. Potom pro každou kouli $B_r(x_0)$ takovou, že $\overline{B_r(x_0)} \subset \Omega$, platí*

$$u(x_0) = \frac{1}{\varkappa_d \, r^{d-1}} \int_{S_r(x_0)} u(\xi) \, \mathrm{d}S_\xi \,. \tag{3.29}$$

Poznámka 3.4.2 Pokud $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$, platí vztah (3.29) i pro koule, které se zevnitř dotýkají hranice Ω. (Je-li $B_R(x_0)$ taková koule, užijeme Větu 3.4.1 pro kouli $B_{R-\varepsilon}(x_0)$ a ve formuli (3.29) pak provedeme limitní přechod $\varepsilon \to 0+$.)

Důkaz věty 3.4.1. Důkaz provedeme pro $d > 2$, případ $d = 2$ lze dokázat analogicky, případně můžeme užít výsledků komplexní analýzy[2]. Vyjdeme z věty 3.2.1 o třech potenciálech a s přihlédnutím k $\Delta u = 0$ dostaneme

$$u(x_0) = \frac{1}{(d-2)\varkappa_d}\left(\int_{S_r(x_0)} \overbrace{\frac{1}{|x_0-\xi|^{d-2}}}^{r^{2-d}} \frac{\partial u}{\partial \nu}(\xi)\,\mathrm{d}S_\xi - \int_{S_r(x_0)} u(\xi)\,\frac{\partial}{\partial \nu}\left(\frac{1}{|x_0-\xi|^{d-2}}\right)\mathrm{d}S_\xi\right)$$

Nyní stačí použít Greenovu větu, která říká $\int_{S_r(x_0)} \frac{\partial u}{\partial \nu}\,\mathrm{d}S_\xi = \int_{B_r(x_0)} \Delta u(\xi)\,\mathrm{d}\xi$ a opět využít harmoničnost funkce u. □

Následující věta je „obrácením“ té předchozí.

Věta 3.4.3 (Obrácená věta o střední hodnotě) *Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ oblast, $u \in \mathcal{C}(\Omega)$. Nechť vztah (3.29) platí pro všechna $x_0 \in \Omega$ a $r > 0$, taková, že $\overline{B_r(x_0)} \subset \Omega$. Potom $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ a $\Delta u = 0$ v Ω.*

Důkaz. Nejprve pomocí regularizátorů dokážeme, že u je hladká. Přistupme tedy k definici.

Definice 3.4.4 $\omega_h(x)$ *je* regularizátor*, pokud:*

1. $\omega_h(x) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$, $\quad \operatorname{supp}\omega_h \subset B_h(0)$
2. $\exists\,\overline{\omega}_h \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, *že* $\omega_h(x) = \overline{\omega}_h(|x|)$
3. $\omega_h(x) \geq 0, \quad 1 = \int_{\mathbb{R}^d} \omega_h(x)\,\mathrm{d}x = \varkappa_d \int_0^h r^{d-1}\overline{\omega}_h(r)\,\mathrm{d}r$

Zvolme $x_0 \in \Omega$, $B_R(0) \subset \Omega$, $h \leq R$. Vynásobme vztah (3.29) (roli r ovšem hraje R) výrazem $\varkappa_d r^{d-1}\overline{\omega}_h(r)$ a zintegrujeme získanou rovnost přes r od 0 do R. Tím dostaneme:

$$u(x_0)\underbrace{\varkappa_d \int_0^R r^{d-1}\overline{\omega}_h(r)\mathrm{d}r}_{1} = \int_{B_R(x_0)} u(\xi)\overline{\omega}_h(\underbrace{|x_0-\xi|}_{r})\mathrm{d}\xi$$

Na levé straně rovnosti jsme využili vlastnost 3 z definice regularizátoru (uvědomte si, proč jsme h volili menší než R !), na pravé straně pak fakt $\int_0^R \int_{S_R} f = \int_{B_R} f$. Nyní si stačí vzpomenout na větu o derivování integrálu podle parametru a spokojeně konstatovat, že $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$.

(Nedokončeno.) □

[2]Uvědomte si, že podobný vztah platí pro holomorfní funkce a že harmonická funkce v $\mathbb{R}^2$ je imaginární složkou nějaké holomorfní funkce.

3.5 Princip maxima

Princip maxima je jednou z nejdůležitějších vlastností harmonických funkcí (a později uvidíme, že v jisté podobě i vlastností řešení širší třídy rovnic).

Věta 3.5.1 (Principy maxima) *Buď* $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *omezená oblast,* $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$, $\Delta u = 0$ *na* Ω. *Potom*

1. *platí tzv. slabý princip maxima:*

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u \,, \qquad \min_{\overline{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u \,; \tag{3.30}$$

2. *platí tzv. silný princip maxima:*

$$\textit{existuje-li lokální extrém } u \textit{ uvnitř oblasti } \Omega, \textit{ je } u \textit{ konstantní na } \overline{\Omega}. \tag{3.31}$$

Poznámka 3.5.2 Důsledkem (3.30) je tvrzení

$$\min_{\partial\Omega} u \le u(x) \le \max_{\partial\Omega} u \qquad \forall\, x \in \Omega \,, \tag{3.32}$$

zatímco důsledkem (3.31) je tvrzení

$$\min_{\partial\Omega} u < u(x) < \max_{\partial\Omega} u \qquad \forall\, x \in \Omega \,. \tag{3.33}$$

Čtenář se může právem ptát, proč na tomto místě uvádíme oba principy maxima, když slabý je důsledkem silného. Vede nás k tomu skutečnost, že pro obecnější eliptické rovnice, jak později uvidíme, platí pouze jakási verze slabého principu maxima (viz Věta 3.5.6). Proto jsme považovali za rozumné zformulovat jej i v této chvíli.

Důkaz. Protože (3.30) plyne z (3.31), stačí ukázat toto tvrzení. Doplnit.

Předběžná studentská verze, snad patřící sem - zkontrolovat!

Zvolme $r > 0$ takové, že koule $\overline{B(x_0, r)}$ leží v Ω. V důsledku věty o průměru platí $u(x_0) = \frac{1}{\varkappa_d r^{d-1}} \int\limits_{S(x_0,r)} u(\xi) dS_\xi$.

Jelikož také $u(x_0) = \frac{1}{\varkappa_d r^{d-1}} \int\limits_{S(x_0,r)} u(x_0) dS_\xi$, dostáváme po odečtení

$$\int\limits_{S(x,r)} (u(x_0) - u(\xi)) \mathrm{d}S_\xi = 0 \,.$$

Funkce $u(x_0) - u(\xi)$ je na $S(x_0, r)$ nezáporná a spojitá, a proto $u(x_0) = u(\xi)$ pro $x \in S(x, r)$.

Nechť dále $0 < r_1 < r$. Zopakováním předešlé úvahy dostaneme, že i pro $|x_0 - \xi| = r_1$ je $u(\xi) = u(x_0)$, a tedy množina $M := \{\xi; u(\xi) = u(x_0)\} \subseteq \overline{\Omega}$ je otevřená v $\overline{\Omega}$. Jelikož u je spojitá, musí být M i uzavřená, a tudíž $M = \overline{\Omega}$.

□

Cvičení 3.5.3 Omezenost oblasti v předchozí větě potřebujeme mimo jiné k tomu, aby existovala níže uvedená maxima a minima (uzávěr omezené oblasti je kompakt). Rozmyslete si, zda by věta platila i pro neomezené oblasti za dodatečného předpokladu, že existují konečná suprema a infima funkce u na $\overline{\Omega}$. Předpoklad existence konečného suprema a infima u na hranici $\partial\Omega$ evidentně nestačí: uvažte funkci $u(x, y) = y$ na horní polorovině. Návod: uvažujte funkce $U(x)$ a $-U(x)$ (viz (3.6)) na $\mathbb{R}^d \setminus \overline{B_1(0)}$.

V dalším se budeme zabývat zobecněním principu maxima pro širší třídu rovnic.

Definice 3.5.4 *Buďte $a_{ij}(x)$, $b_j(x)$, $c(x) \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ omezená oblast. Pro $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ definujme operátor $L : \mathcal{C}^2(\Omega) \to \mathcal{C}(\Omega)$ předpisem*

$$Lu(x) := \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) + \sum_{j=1}^{d} b_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) + c(x)\, u(x)\,. \tag{3.34}$$

Díky uvažovaným hladkostem můžme bez újmy na obecnosti předpokládat, že

$$a_{ij}(x) = a_{ji}(x) \qquad \forall\, x \in \overline{\Omega} \tag{3.35}$$

(rozmyslete si). Buď dále

$$\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j > 0 \quad \forall\, \xi \neq 0\,, \forall\, x \in \overline{\Omega}\,. \tag{3.36}$$

Pak nazvu operátor L eliptickým operátorem na Ω, a rovnici $Lu = f$, kde $f \in \mathcal{C}(\Omega)$, eliptickou rovnicí na Ω.

Poznámka 3.5.5

- Pojem eliptičnosti rovnice ve výše uvedeném smyslu splývá s pojmem eliptičnosti, jak jsme jej uváděli v paragrafu o klasifikaci rovnic druhého řádu: matice $A(x) := (a_{ij}(x))_{i,j=1}^{d}$ je symetrická a pozitivně definitní, tedy diagonalizovatelná, a navíc podobná jednotkové matici. Rozmyslete si podrobně.

- Existují různé varianty podmínek elipticity (3.36). Námi uvedená verze je poněkud nestandardní zjednodušujícím předpokladem, že (3.36) má platit na uzávěru Ω (většinou se požaduje splnění (3.36) pro $x \in \Omega$). Tento předpoklad již vlastně implikuje více: výraz

$$\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x) \frac{\xi_i}{\|\xi\|} \frac{\xi_j}{\|\xi\|}\,, \quad \xi \neq 0\,, \tag{3.37}$$

je kladný na kompaktní množině $(x,\eta) \in \overline{\Omega} \times S_1(0)$, $\eta_i = \xi_i/\|\xi\|$, proto na ní nabývá kladného minima $\alpha 0$. Tím jsme však dokázali, že

$$\exists\, \alpha > 0\,, \quad \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j > \alpha\|\xi\|^2 \quad \forall\, \xi \neq 0\,,\ x \in \overline{\Omega}\,, \tag{3.38}$$

tedy tzv. silnou [zkontroluj pojem, event. přidej další možné elipticity] elipticitu operátoru L.

Následující věta ukazuje zajímavou skutečnost, že chování maxim a minim řešení eliptické rovnice $Lu = f$ je ovlivněno nejvíce znaménkem funkcí $c(x)$ a $f(x)$ (Například nerovnost $Lu \geq 0$ lze chápat i takto: buď $f \geq 0$ a u takové, že $Lu = f$).

Věta 3.5.6 (Zobecněný slabý princip maxima) *Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ omezená oblast, $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$. Buď L eliptický operátor ve smyslu Definice 3.5.4. Potom platí:*

1. *Je-li $c(x) \equiv 0$ v Ω, pak*

$$Lu \geq 0 \quad v\,\Omega \qquad \Rightarrow \qquad \max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u\,, \tag{3.39}$$

$$Lu \leq 0 \quad v\,\Omega \qquad \Rightarrow \qquad \min_{\overline{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u\,, \tag{3.40}$$

$$Lu = 0 \quad v\,\Omega \qquad \Rightarrow \qquad \min_{\partial\Omega} u \leq u(x) \leq \max_{\partial\Omega} u \quad \forall\, x \in \overline{\Omega}\,. \tag{3.41}$$

2. *Je-li $c(x) \leq 0$ v Ω, pak*

$$Lu \geq 0 \quad v\,\Omega \qquad \Rightarrow \qquad \max_{\overline{\Omega}} u \leq \max_{\partial\Omega} u^+\,, \tag{3.42}$$

$$Lu \leq 0 \quad v\,\Omega \qquad \Rightarrow \qquad \min_{\overline{\Omega}} u \geq \min_{\partial\Omega} u^-\,, \tag{3.43}$$

$$Lu = 0 \quad v\,\Omega \qquad \Rightarrow \qquad \max_{\overline{\Omega}} |u| = \max_{\partial\Omega} |u|\,, \tag{3.44}$$

kde $u^+ := \max(u,0)$, $u^- := \min(u,0)$.

Poznámka 3.5.7 Užívá se i jiná definice pro u^-, rozmyslete si, že zde máme $u^- \leq 0$ a že v našem označení platí: $|u| = u^+ - u^-$, $u = u^+ + u^-$.

Tvrzení (3.43) lze zformulovat i takto: „Kladné maximum u nelze nabýt uvnitř Ω“, zatímco tvrzení (3.44) lze zformulovat i takto: „Záporné minimum u nelze nabýt uvnitř Ω.“

Důkaz. Doplnit.

Buď $c(x) = 0, Lu \geq 0$. Chceme ukázat, že pro u platí slabý princip maxima.

Zvolme $j \in \{1,\dots,d\}$ pevně. Víme, že pro každé $\xi \in \mathbb{R}^d$ je $\sum_{i,j} a_{ij}\xi_i\xi_j > 0$ na $\overline{\Omega}$. Speciální volbou $\xi = (0,\dots,1,\dots,0)$ (volíme postupně všechny bázové vektory), dostáváme $a_{jj} > 0$ pro $j = 1,\dots,d$. $\overline{\Omega}$ je kompaktní a tudíž existuje $\min_{\overline{\Omega}} a_{jj}(x) > 0$. Funkce $b_j(x)$ jsou na $\overline{\Omega}$ omezené, z čehož je vidět, že existuje $\gamma > 0$, že pro každé $x \in \overline{\Omega}$ platí $\gamma^2 a_{jj} + \gamma b_j > 0$.

Nechť $\varepsilon > 0$. Definujme $u_\varepsilon := u(x) + \varepsilon e^{\gamma x_j}$. Potom $Lu_\varepsilon(x) = Lu(x) + \varepsilon(\gamma^2 a_{jj}(x) + \gamma b_j(x))e^{\gamma x_j} > 0$, neboť $Lu \geq 0$ a $\gamma^2 a_{jj}(x) + \gamma b_j(x) > 0$. Nechť u_ε nabývá svého maxima uvnitř Ω v bodě x_0. Potom $\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i} = 0$ pro $i = 1,\dots,d$ a matice druhých derivací $(\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x_i \partial x_j}{}_{i,j})_{i,j}$ je negativně semidefinitní. Ukážeme, že platí ($a_{ij}(x_0)$ jsou čísla!)

$$Lu_\varepsilon(x_0) = \sum_{i,j} a_{ij}(x_0)\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x_i \partial x_j} \leq 0.$$

Nechť A, B jsou libovolné symetrické matice, A pozitivně a B negativně semidefinitní. Máme $\sum_{i,j} a_{ij}b_{ij} = \sum_i \sum_j a_{ij}b_{ji} = \sum_i c_{ii}$, kde $C = AB$ je součin matic A a B. Snadno se ověří, že C je negativně semidefinitní a tedy pro každé i je $c_{ii} \leq 0$. Tedy $\sum_{i,j} a_{ij}b_{ij} \leq 0$.

Tím jsme ukázali, že $Lu_\varepsilon(x_0) = \sum_{i,j} a_{ij}(x_0)\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x_i \partial x_j} \leq 0$ (tady jsme konečně využili, že L je eliptický). To je však spor s tím, že $L_\varepsilon(x) > 0$, což jsme ukázali výš. Tedy maximum funkce u_ε nemůže ležet uvnitř Ω, $\max_{\overline{\Omega}} u_\varepsilon = \max_{\partial\Omega} u_\varepsilon$.

Z definice u_ε je hned vidět, že u_ε konverguje na $\overline{\Omega}$ stejnoměrně k u pro $\varepsilon \to 0$. Funkce „hodnota maxima dané funkce" jako zobrazení z prostoru spojitých funkcí na kompaktu s maximovou metrikou do $\mathbb{R}$ je spojité zobrazení,[3] a proto $\max_{\overline{\Omega}} u_\varepsilon \to \max_{\overline{\Omega}} u$ a $\max_{\partial\Omega} u_\varepsilon \to \max_{\partial\Omega} u$ pro $\varepsilon \to 0$. Jelikož $\max_{\overline{\Omega}} u_\varepsilon = \max_{\partial\Omega} u_\varepsilon$, limitní přechod dá $\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$. Ukázali jsme (3.39).

Vztah (3.40) se plyne z (3.39) přechodem k $-u$, (3.41) je důsledek (3.39) a (3.40).

Nechť dále $c(x) \leq 0$ a $L_u \geq 0$. Označme $\Omega_+ := \Omega \cap \{u(x) > 0\}$. Jestliže $\Omega_+ = \emptyset$, platí (3.41) triviálně. Nechť $\Omega_+ \neq \emptyset$. Uvědomme si, že je to otevřená množina a pro $x \in \Omega_+$ platí

$$\sum_{i,j} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_j b_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j} = Lu - c(x)u(x) \geq 0,$$

neboť $Lu \geq 0$, $u > 0$ a $c \leq 0$ na Ω_+. Označme levou stranu poslední rovnosti $L'u$. L' je eliptický operátor, $L'u \geq 0$ na omezené oblasti Ω_+ a proto podle (3.39) je $\max_{\overline{\Omega}_+} u = \max_{\partial\Omega_+} u$. Tedy jestliže $\Omega_+ \neq \emptyset$, platí dokonce slabý princip maxima. Jestliže

[3] Na rozdíl od funkce „Bod, ve kterém se maximum nabývá", rozmyslete si!

$\Omega_+ = \emptyset$, potom je $\max\limits_{\overline{\Omega}} u \le 0 \le \max\limits_{\partial\Omega} u^+$.

Vztahy (3.43) a (3.44) jsou pak už snadným důsledkem.

$\square$

Příklad 3.5.8 Pro $c(x) \ge 0$ žádnou obdobu tvrzení (3.42)-(3.44) očekávat nelze. Uvažujme následující příklad. Buď $\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 < x, y < \pi\}$ čtverec o straně π a uvažujme $u(x, y) := \sin x \sin y$. Potom $\Delta u + 2u = 0$ v Ω, $u = 0$ na $\partial\Omega$, a přitom $u(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) = 1$. Nepřítomnost principu maxima v tomto případě má za následek i nejednoznačnost řešení odpovídající Dirichletovy úlohy: stejné rovnici a stejným datům vyhovuje i funkce identicky nulová v Ω. Nemusí to však vždy být nevýhodou - diskuse o vlastních číslech a vlastních funkcích.

Na závěr tohoto paragrafu se budeme věnovat tzv. odstranitelné singularitě.

Následující lemma lze rovněž nazírat jako „princip maxima, pro funkce, harmonické s výjimkou jednoho bodu." Chování v okolí onoho bodu však musíme znát. Lemma využijeme v důkaze po něm následující věty.

Lemma 3.5.9 *Buď $g \in \mathcal{C}(\overline{B_R(x_0)} \setminus \{x_0\})$, $\Delta g = 0$ na $B_R(x_0) \setminus \{x_0\}$. Buď navíc*

$$g(x) = \mathrm{o}(U(x - x_0)), \quad x \to x_0, \tag{3.45}$$

kde $U(x)$ je elementární řešení Laplaceovy rovnice (viz (3.6)). Potom platí implikace: $g \le 0$ na $S_R(x_0) \Rightarrow g \le 0$ na $\overline{B_R(x_0)} \setminus \{x_0\}$.

Důkaz. Vezměme pevné $z \in B_R(x_0) \setminus \{x_0\}$ a $\varepsilon > 0$, a najděme $r > 0$ takové, že $z \notin B_r(x_0)$ a zároveň (díky (3.45))

$$g(x) \le |g(x)| \le \varepsilon\, U(x - x_0) \quad \forall\, x \in \overline{B_r(x_0)}.$$

Pro funkci $h(x) := g(x) - \varepsilon U(x - x_0)$ tedy speciálně máme $h \le 0$ na $S_r(x_0)$. Z předpokladů lemmatu však také plyne $h \le 0$ na $S_R(x_0)$ a přitom $\Delta h = 0$ v mezikoulí $B_R(x_0) \setminus \overline{B_r(x_0)}$. Podle principu maxima (3.32) je tedy $h \le 0$ v onom mezikruží, speciálně v bodě z máme

$$g(z) \le \varepsilon U(z - x_0).$$

Protože $\varepsilon > 0$ může být jakékoli, máme odtud $g(z) \le 0$, a protože bod $z \in B_R(x_0) \setminus \{x_0\}$ byl libovolný, je naše tvrzení dokázáno. $\square$

Věta 3.5.10 (O odstranitelené singularitě) *Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ omezená oblast, $\Delta u = 0$ v $\Omega \setminus \{x_0\}$. Nechť navíc*

$$u(x) = \mathrm{o}(U(x - x_0)), \quad x \to x_0. \tag{3.46}$$

Potom existuje vlastní $\lim_{x \to x_0} u(x)$, a po dodefinování u v x_0 hodnotou této limity je $\Delta u = 0$ v Ω.

Důkaz. Volme $R > 0$ takové, aby $\overline{B_R(x_0)} \subset \Omega$. Buď dále $v \in \mathcal{C}^2(B_R(x_0)) \cap \mathcal{C}(\overline{B_R(x_0)})$ taková, že $\Delta v = 0$ na $B_R(x_0)$ a $v = u$ na $S_R(x_0)$. Taková funkce v existuje: je definovaná Poissonovým integrálem z hodnot funkce u na $S_R(x_0)$. Protože v je omezená na $B_R(x_0)$, splňují funkce $g_1 := u - v$ i $g_2 := v - u$ předpoklady předchozího lemmatu. Proto je $u = v$ na $\overline{B_R(x_0)} \setminus \{x_0\}$ a funkce $\widetilde{u}$, definovaná předpisem

$$\widetilde{u}(x) := \begin{cases} u(x) & \text{na } \overline{\Omega \setminus B_R(x_0)}\,, \\ \\ v(x) & \text{na } \overline{B_R(x_0)}\,, \end{cases}$$

je hledaným harmonickým rozšířením u na Ω. □

3.6 Věta Liouvilleova a věty Harnackovy

Vrátíme se ještě na chvíli ke studiu harmonických funkcí. Následující věta je analogií stejnojmenného tvrzení z teorie funkcí komplexní proměnné, které platí pro omezené holomorfní funkce na $\mathbb{C}$.

Věta 3.6.1 (Liouville) *Buď $u \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^d)$ (tedy $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^d)$, $\Delta u = 0$ v $\mathbb{R}^d$) alespoň jednostranně omezená na $\mathbb{R}^d$. Pak u je konstantní v $\mathbb{R}^d$.*

Důkaz. Tvrzení dokážeme pro $d > 2$, pro $d = 2$ by se důkaz vedl buď obdobně nebo by bylo možno vhodně využít tvrzení komplexní verze Liouvilleovy věty – čtenáři dodáváme kuráže, aby se pokusil obě varianty (jako cvičení) provést.

Bez újmy na obecnosti budeme dále předpokládat, že u je omezená zdola (jinak bychom naše úvahy prováděli pro funkci $-u$), a dokonce že $u \geq 0$. Skutečně: pokud exsituje $c \in \mathbb{R}$ taková, že $u \geq c$ na $\mathbb{R}^d$, je $u - c \geq 0$, a přitom $u - c \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^d) \iff u \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^d)$.

Zvolíme pevně $x \in \mathbb{R}^d$, a ukážeme $u(x) = u(0)$, tím bude důkaz proveden.

Volme $R > |x|$ a použijme Poissonův vzorec (3.28) pro kouli $B_R(0)$. Podle Věty 3.3.6 je potom funkce

$$x \mapsto \frac{1}{\varkappa_d\, R} \int_{S_R(0)} u(\xi) \frac{R^2 - |x|^2}{|x - \xi|^d}\, \mathrm{d}S(\xi)\,,$$

klasickým řešením Dirichletovy úlohy pro Laplaceovu rovnice na kouli $B_R(0)$ s okrajovou podmínkou u na $S_R(0)$. Tutéž úlohu však řeší také funkce u. Z jednoznačnosti řešení Dirichletovy úlohy pro Laplaceovu rovnici tedy plyne

$$u(x) = \frac{1}{\varkappa_d\, R} \int_{S_R(0)} u(\xi) \frac{R^2 - |x|^2}{|x - \xi|^d}\, \mathrm{d}S(\xi)\,.$$

Dále pro všechna $\xi \in S_R(0)$ platí nerovnosti $R - |x| \leq |x - \xi| \leq R + |x|$ (x leží uvnitř koule, nakreslete si obrázek), které implikují

$$\frac{R + |x|}{(R - |x|)^{d-1}} = \frac{R^2 - |x|^2}{(R - |x|)^d} \geq \frac{R^2 - |x|^2}{|x - \xi|^d} \geq \frac{R^2 - |x|^2}{(R + |x|)^d} = \frac{R - |x|}{(R + |x|)^{d-1}}\,.$$

Vynásobme tyto nerovnosti (kladným číslem)[4] $u(\xi)/(\varkappa_d R)$ a integrujme $\mathrm{d}S(\xi)$ přes $S_R(0)$:

$$\frac{1}{\varkappa_d R}\frac{R+|x|}{(R-|x|)^{d-1}}\int_{S_R(0)} u(\xi)\,\mathrm{d}S(\xi) \ge u(x) \ge \frac{1}{\varkappa_d R}\frac{R-|x|}{(R+|x|)^{d-1}}\int_{S_R(0)} u(\xi)\,\mathrm{d}S(\xi)\,.$$

Oba krajní itegrály upravíme podle věty o průměru – viz (3.29):

$$u(0)\,\frac{R^{d-2}\,(R+|x|)}{(R-|x|)^{d-1}} \ge u(x) \ge u(0)\,\frac{R^{d-2}\,(R-|x|)}{(R+|x|)^{d-1}}\,. \tag{3.47}$$

Protože je $u \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^d)$, lze uvedenou úvahu provést pro všechna $R > 0$. Na základě toho lze v (3.47) provést limitní přechod $R \to +\infty$, která dává $u(0) \ge u(x) \ge u(0)$, což jsme chtěli ukázat. □

Poznámka 3.6.2 • Díky hladkosti u stačí předpokládat jednostrannou omezenost u vně nějaké (uzavřené koule) koule. Přesněji: mějme $u \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^d)$, která je (alespoň jednostranně) omezená vně nějaké (uzavřené) koule v $\mathbb{R}^d$. Pak u je konstantní.

- Důsledkem Liouvilleovy věty je také například skutečnost, že pro nekonstantní $u \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^d)$ nemůže existovat vlastní limita pro $|x| \to +\infty$.

- Pokud je „pouze“ $u \in \mathcal{H}(B_R(0))$, $u \ge 0$ na $B_R(0)$, plyne z důkazu předchozí věty, že platí nerovnosti (3.47). Takovýmto nerovnostem se někdy říká nerovnosti Harnackova typu (nebo jednoduše Harnackovy nerovnosti). Tyto nerovnosti ukazují, že i (zdola) omezená hamonická funkce na omezené množině „nemůže růst libovolně rychle“. Následující dvě (dosti si podobná) tvrzení patří svům charakterem do této skupiny nerovností.

  (1) Buď $u \in \mathcal{H}(B_R(0))$, $u > 0$ na $B_R(0)$. Potom pro všechna $0 < r < R$ a pro všechna $x, y \in B_r(0)$ platí $u(x) \le u(y)\frac{R^2}{R^2-r^2}\left(\frac{R+r}{R-r}\right)^d$.

  (2) Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ otevřená, $u > 0$ na Ω, $u \in \mathcal{H}(\Omega)$. Potom pro všechna $K \subset \Omega$ kompaktní existuje konstanta $c > 0$, že pro všechna x, $y \in K$ je $u(x) \le c\,u(y)$.

Na závěr tohoto paragrafu zformulujeme (zatím bez důkazu) tři tzv. Harnackovy věty (když už tady to jméno před chvíli padlo). Všechny se zabývají studiem chování posloupností harmonických funkcí.

Věta 3.6.3 (První věta Harnackova) *Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ omezená oblast, $u_n \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$, $\Delta u_n = 0$ v Ω. Pokud $u_n \rightrightarrows u_0$ na $\partial\Omega$, pak*

[4] Proto bylo důležité předpokládat $u \ge 0$.

(i) *existuje* $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$, $u_n \rightrightarrows u$ *v* $\overline{\Omega}$;

(ii) $\Delta u = 0$ *v* Ω, $u = u_0$ *na* $\partial\Omega$;

(iii) u_n, $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$, *a pro všechny multiindexy* α *je* $D^\alpha u_n \overset{loc}{\rightrightarrows} D^\alpha u$ *v* Ω.

Tedy m.j.: stejnoměrná limita spojitých stop harmonických funkcí je stopou harmonické funkce.

Věta 3.6.4 (Druhá věta Harnackova) *Buď* $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *obecně neomezená oblast,* $u_n \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, $\Delta u_n = 0$ *v* Ω. *Pokud* u_n *je monotónní posloupnost funkcí a navíc existuje* $x_0 \in \Omega$, *že* $u_n(x_0)$ *konverguje, tak existuje* $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, $\Delta u = 0$ *v* Ω, *že* $u_n \overset{loc}{\rightrightarrows} u$ *v* Ω.

Věta 3.6.5 (Relativní kompaktnost harmonických funkcí)[5] *Buď* $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *oblast,* $u_n \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, $\Delta u_n = 0$ *v* Ω. *Pokud existuje* $M > 0$, *že* $|u_n| \leq M$ *stejnoměrně v* Ω, *tak existuje podposloupnost* u_{n_k} *a funkce* $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, $\Delta u = 0$ *v* Ω, *že* $u_{n_k} \overset{loc}{\rightrightarrows} u$ *v* Ω.

3.7 Řešení Dirichletovy úlohy Perronovou metodou

Věta 3.7.1 (O řešení Dirichletovy úlohy pro Laplaceovu rovnici) *Buď* $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *omezená oblast,* $\partial\Omega \in \mathcal{C}^2$, $\varphi \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$. *Potom existuje právě jedna funkce* $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cup \mathcal{C}(\overline{\Omega})$, *že*

$$\Delta u = 0 \qquad v \quad \Omega\,, \tag{3.48}$$

$$u = \varphi \qquad na \quad \partial\Omega\,. \tag{3.49}$$

Pro tuto funkci navíc platí $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$.

Poznámka 3.7.2

- Jednoznačnost už víme, je to důsledek obecného principu maxima. Pro jednoznačnost není potřeba žádná hladkost hranice, ta je potřeba pro existenci. V důkazu věty uvidíme, že je vlastně potřeba poněkud slabší vlastnost hranice (existence tzv. bariéry, kterou $\mathcal{C}^2$ hranice mají).
- Regularitu řešení Laplaceovy rovnice (tj. skutečnost, že $\Delta u = 0$ a $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ implikuje již $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$) jsme již také dokazovali (viz metodu regularizátorů v obrácené větě o střední hodnotě pro harmonické funkce).
- Důkaz věty povedeme tzv. metodou subharmonických a superharmonických funkcí, nazývanou též metoda harmonického zdvihu nebo Perronova metoda. Důkaz touto metodou lze nalézt například v [19]. Jinou možností je použít tzv. metodu potenciálů, viz například [11].

[5] Této větě se někdy říká „třetí Harnackova věta“.

Zajímá nás existence a jednoznačnost řešení úlohy:

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \quad \text{v } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} &= \varphi \end{aligned} \tag{3.50}$$

kde $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je omezená oblast a $\varphi \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$. Řešení hledáme v $\mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$.
K důkazu příslušné věty bude třeba následujících definic, pozorování a tvrzení (převážně bez důkazu):

1. **Definice 3.7.3** *Řekneme, že oblast Ω má vlastnost (B) (existence bari) pokud:*

   $$\forall \xi \in \partial\Omega \quad \exists R > 0 \quad \exists y \in \mathbb{R}^d : B_R(y) \subset \mathbb{R}^d \setminus \Omega \quad \wedge \quad \overline{B_R(y)} \cap \overline{\Omega} = \{\xi\}$$

   Poznámky:

   - $\partial\Omega \in \mathcal{C}^2 \implies \Omega$ má vlastnost (E)
   - Ω je konvexní $\implies \Omega$ má vlastnost (E)
   - Nesplnění (E) byť v jednom bodě může dát neexistenci řešení.

2. **Definice 3.7.4** *Řekneme, že funkce $v \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ je* <u>*subharmonická*</u> *v Ω pokud:*

   $$\forall B \textit{ je koule}, \overline{B} \subset \Omega \quad \forall h \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega}), \Delta h = 0 \textit{ v } B : v \leq h \textit{ na } \partial B \implies v \leq h \textit{ v } B \tag{3.51}$$

   Řekneme, že funkce $v \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ je <u>*superharmonická*</u> *v Ω pokud:*

   $$\forall B \textit{ je koule}, \overline{B} \subset \Omega \quad \forall h \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega}), \Delta h = 0 \textit{ v } B : v \geq h \textit{ na } \partial B \implies v \geq h \textit{ v } B \tag{3.52}$$

3. $v \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ pak:

   $$v \text{ je subharmonická} \implies \Delta v \leq 0 \text{ v } \Omega \tag{3.53}$$
   $$v \text{ je superharmonická} \implies \Delta v \geq 0 \text{ v } \Omega \tag{3.54}$$

4. Důsledek: $v \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \wedge \Delta v = 0 \iff v$ je subharmonická i superharmonická
   .

5. Pro $W := \max(v_1, \ldots, v_n)$, $w := \min(v_1, \ldots, v_n)$, platí:

   $$v_1, \ldots, v_n \text{ jsou subharmonické} \implies W \text{ je subharmonická} \tag{3.55}$$
   $$v_1, \ldots, v_n \text{ jsou superharmonické} \implies w \text{ je superharmonická} \tag{3.56}$$

6. v_s je subharmonická v Ω, v^s je superharmonická v Ω a $v_s \leq v^s$ na $\partial\Omega \implies v_s \leq v^s$ v $\overline{\Omega}$.

7. **Definice 3.7.5** *Nechť v je subharmonická, B je koule, $\overline{B} \subset \Omega$. Dále nechť $\overline{v}$ je funkce na $\overline{B}$ daná Poissonovým integrálem z hodnot v na ∂B. (Pro $\overline{v}$ platí $\Delta \overline{v} = 0$ v B a $\overline{v} = v$ na ∂B.)*
   Pak funkci:
   $$V(x) := \begin{cases} v(x) & x \in \Omega \setminus B \\ \overline{v}(x) & x \in \overline{B} \end{cases}$$
   nazveme harmonickým zdvihem funkce v na Ω vzhledem k B.

   Pro V platí:

   - $\Delta V = 0$ v B ($\overset{4.}{\Longrightarrow}$ V je superharmonická v B) … odtud „harmonický"
   - $v = V$ na $\partial B \overset{6.}{\Longrightarrow} v \leq V$ na $\overline{B} \Longrightarrow v \leq V$ v Ω … odtud „zdvih"
   - V je subharmonická v Ω

8. **Definice 3.7.6** *Řekneme, že $v \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ je subřešení úlohy (3.50), jestliže:*

   - *v je subharmonická v Ω*
   - *$v \leq \varphi$ na $\partial\Omega$*

   Řekneme, že $v \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ je superřešení úlohy (3.50), jestliže:

   - *v je superharmonická v Ω*
   - *$v \geq \varphi$ na $\partial\Omega$*

9. Vždy existuje subřešení i superřešení úlohy (3.50). (např. $v \equiv \min_{\partial\Omega} \varphi$ je subřešení)

10. Pokud existuje u řešení úlohy (3.50), pak je to subřešení i superřešení.
    Z 6. pak plyne $v_s \leq u \leq v^s \quad \forall v_s$ subharmonická, v^s superharmonická.

Věta 3.7.7 *Buď Ω omezená oblast v $\mathbb{R}^d$ mající vlastnost (E).*
Potom existuje právě jedno řešení $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ úlohy (3.50). Navíc $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$.

Poznámky k důkazu:

1. Jednoznačnost plyne z principu maxima i bez vlastnosti (E).

2. $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \wedge \Delta u = 0 \implies u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ … viz. odstavec 3.2.

3. metody důkazu: Perronova (též metoda subřešení, metoda harmonického zdvihu) (lit. Renardy–Rogers) a metoda potenciálů (lit. John–Nečas)

Důkaz. Protože množina

$$A := \{v \text{ je subřešení úlohy (3.50); } \min_{\partial\Omega} \varphi \leq v \leq \max_{\partial\Omega} \varphi\}$$

je neprázdná (viz bod 9.), můžeme bodově definovat funkci

$$u(x) := \sup_{v \in A} v(x) \quad \forall x \in \Omega$$

o které dokážeme, že je řešením.
K tomu je třeba:

1. $u \in \mathcal{C}^2(\Omega),\ \Delta u = 0$ v Ω (platí i bez (E))
2. (E) $\implies \forall \xi \in \partial\Omega : \lim_{x \in \Omega, x \to \xi} u(x) = \varphi(\xi)$

ad 1. Nechť $x_0 \in \Omega$ je libovolné. Z definice u existuje $\{v_m\},\ v_m(x_0) \to u(x_0)$. Volme $R > 0$, aby $\overline{B_R(x_0)} \subset \Omega$, a označme V_m harmonický zdvih funkce v_m na Ω vzhledem k $B_R(x_0)$. Pro V_m platí:

1. $V_m \in A$
2. $v_m(x_0) \leq V_m(x_0) \leq u(x_0) \implies V_m(x_0) \to u(x_0)$
3. $\Delta V_m = 0$ na $B_R(x_0)$

Z 2. a 3. plyne podle Věty 3.6.4, že existuje vybraná posloupnost V_{m_k} tak, že

$$V_{m_k} \rightrightarrows v \text{ lokálně na } B_R(x_0)$$

Navíc o v víme, že $v \in \mathcal{C}^2(B_R(x_0))$ a $\Delta v = 0$ na $B_R(x_0)$. Dokážeme $v = u$ na $B_R(x_0)$. Z konstrukce v je zřejmě $v \leq u$. Pro důkaz opačné nerovnosti předpokládejme pro spor

$$\exists y \in B_R(x_0)\ \exists w \in A : v(y) < w(y) \leq u(y)\,. \tag{3.57}$$

Nyní položme $z_k := \max(w, V_k)$ a dále stejně jako při konstrukci v máme Z_k příslušné harmonické zdvihy a existuje vybraná Z_{k_j} a $Z_{k_j} \rightrightarrows z$ lokálně na $B_R(x_0)$. Nyní máme $v - z \leq 0$ a $\Delta(v - z) = 0$ na $B_R(x_0)$ a $(v - z)(x_0) = 0$ z čehož plyne, že $v - z$ nabývá v x_0 lokálního maxima. Podle principu maxima je $v - z \equiv 0$ na $B_R(x_0)$ a tedy $v(y) = z(y) \geq w(y)$ což je spor s (3.57).

ad 2. (Diskuse o hranici a nabývání dat)
Nechť $\forall \xi \in \partial\Omega \quad \exists w \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$:

- $\lim_{x \in \Omega, x \to \xi} w(x) = 0$

- $w > 0$ na $\overline{\Omega} \setminus \{\xi\}$
- w je superharmonická v Ω

potom funkci w nazveme bariérou. Z podmínky (E) plyne, že v každém bodě $\xi \in \partial\Omega$ existuje bariéra a to funkce:

$$w(x) := \begin{cases} \ln \frac{1}{R} - \ln \frac{1}{|x-y|} & \text{pro } d = 2\,, \\ \frac{1}{R^{d-2}} - \frac{1}{|x-y|^{d-2}} & \text{pro } d \geq 3\,, \end{cases}$$

kde y a R jsou střed a poloměr koule z podmínky (E). Nyní chceme dokázat, že pro libovolné pevné $\xi \in \partial\Omega$ platí:

$$\lim_{x \in \Omega, x \to \xi} u(x) = \varphi(\xi)$$

Pro libovolné $\varepsilon > 0$ najdeme $\delta > 0$ (ze spojitosti φ), aby

$$|\varphi(x) - \varphi(\xi)| < \varepsilon \qquad \forall x \in \partial\Omega, |x - \xi| < \delta$$

Dále, protože w nabývá na $\overline{\Omega \setminus U_\delta(\xi)}$ kladného minima, existuje $K > 0$ tak, že

$$w(x) \geq \frac{2M}{K} \qquad \forall x \in \overline{\Omega}, |x - \xi| \geq \delta$$

Nyní zavedeme $v_1(x) := \varphi(\xi) + \varepsilon + Kw(x)$. Tato funkce je superharmonická, a protože $v_1(x) \geq \varphi(\xi) + \varepsilon$ na $\partial\Omega$ je v_1 i superřešení. Podobně $v_2(x) := \varphi(\xi) - \varepsilon - Kw(x)$ je subřešení. Nyní máme $v_2(x) \leq u(x) \leq v_1(x)$ v Ω a odtud (jelikož $w(x) \stackrel{x \to \xi}{\longrightarrow} 0$) plyne $|u(x) - \varphi(\xi)| \leq 2\varepsilon$. Tím je důkaz hotov. $\square$

Kapitola 4

Evoluční rovnice

Termín „evoluční rovnice“ používáme pro parciální diferenciální rovnice, obsahující časovou derivaci,[1] nejčastěji pak rovnice rozřešené vzhledem k nejvyšší časové derivaci v nich obsažené. Zde se budeme zabývat dvěma význačnými představiteli takových rovnic: rovnicí vedení tepla jako reprezentantem třídy rovnic parabolických, a vlnovou (hyperblickou) rovnicí.

4.1 Rovnice vedení tepla

Definice 4.1.1 (Cauchyova úloha pro rovnici vedení tepla) *Buď* $\Omega = \mathbb{R}^d$, $T > 0$, $Q_T := \Omega \times (0,T)$, $f \in \mathcal{C}(Q_T)$, $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^d)$. *Řekneme, že* $u : \overline{Q_T} \to \mathbb{R}$ *je klasickým řešením Cauchyovy úlohy pro rovnici vedení tepla, pokud*

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f \qquad \text{pro všechna } (x,t) \in Q_T\,, \tag{4.1}$$

$$u(\cdot,0) = \varphi \qquad \text{pro všechna } x \in \mathbb{R}^d\,, \tag{4.2}$$

a přitom $u \in \mathcal{C}(\overline{Q_T})$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}$, $\frac{\partial u}{\partial t} \in \mathcal{C}(Q_T)$.

Definice 4.1.2 (Počátečně-okrajová úloha pro rovnici vedení tepla) *Buď* $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *omezená oblast,* $T > 0$, $Q_T := \Omega \times (0,T)$ *(tzv. časoprostorový válec),* $\Gamma := (\overline{\Omega} \times \{0\}) \cup (\partial\Omega \times \langle 0,T\rangle)$ *(tzv. parabolická hranice časoprostorového válce). Buď dále* $f \in \mathcal{C}(Q_T)$, $\varphi \in \mathcal{C}(\Gamma)$. *Řekneme, že* $u : \overline{Q_T} \to \mathbb{R}$ *je klasickým řešením počátečně-okrajové úlohy pro rovnici vedení tepla, pokud*

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f \qquad \text{pro všechna } (x,t) \in Q_T\,, \tag{4.3}$$

$$u = \varphi \qquad \text{pro všechna } (x,t) \in \Gamma\,, \tag{4.4}$$

[1]Přítomnost času signalizuje evoluci; pokus o zavedení termínu „revoluční rovnice“ nebyl podle autorových znalostí nikdy učiněn, i když některým dějinným epochám by to bylo podobné.

a přitom $u \in \mathcal{C}(\overline{Q_T})$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}$, $\frac{\partial u}{\partial t} \in \mathcal{C}(\overline{Q_T} \setminus \Gamma)$.

Definice 4.1.3 (Greenova funkce pro rovnici vedení tepla) *Fundamentálním řešením (Greenovou funkcí) pro rovnici vedení tepla (RVT) nazvu funkci*

$$G(x,t) := \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{d}{2}}}\, e^{-\frac{|x|^2}{4t}}\,, \qquad x \in \mathbb{R}^d\,,\ t > 0\,. \tag{4.5}$$

Poznámka 4.1.4 Greenovu funkci lze nalézt pomocí Fourierovy transformace jako řešení úlohy $\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0$, které ve smyslu distribucí splňuje $\lim_{t\to 0+} u(\cdot,t) = \delta$. Výpočet vyžaduje znalost chování Fourierovy transformace na prostoru temperovaných distribucí a zde jej zatím nebudeme provádět. Čtenář může konzultovat například [23] nebo [2].

Lemma 4.1.5 (Vlastnosti Greenovy funkce pro rovnici vedení tepla) *Funkce* G*, definovaná vztahem* (4.5)*, splňuje* $G \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d \times (0,+\infty))$*, a dále*

$$\frac{\partial G}{\partial t} - \Delta G = 0 \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^d\,,\ t > 0\,.$$

Ve smyslu distribucí navíc platí $\lim_{t\to 0+} G(\cdot,t) = \delta$*. Přitom v bodovém smyslu je*

$$\lim_{t\to 0+} G(x,t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \neq 0\,, \\ +\infty & \text{pro } x = 0\,. \end{cases}$$

O vlastnosti Greenovy funkce se opírá následující věta, která ukazuje, že jedno z řešení Cauchyovy úlohy (časem uvidíme, v jakém smyslu je takové řešení jednoznačné) lze pro vhodná data psát explicitně.

Věta 4.1.6 (Existence řešení Cauchyovy úlohy pro rovnici vedení tepla) *Buď* $T > 0$, $Q_T = \mathbb{R}^d \times (0,T)$, $f \in \mathcal{C}^2(Q_T)$, $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^d)$ *omezené funkce. Nechť navíc jsou všechny prostorové derivace* f *až do řádu* 2 *včetně omezené na* Q_T*. Potom funkce* u*, definovaná předpisy* $u(x,0) := \varphi(x)$ *na* $\mathbb{R}^d$*, a*

$$u(x,t) := \int_{\mathbb{R}^d} G(x-y,t)\,\varphi(y)\,\mathrm{d}y + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} G(x-y,t-\tau)\,f(y,\tau)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\tau \tag{4.6}$$

pro $x \in \mathbb{R}^d$, $t > 0$*, je klasickým řešením Cauchyovy úlohy* (4.1)–(4.2)*. Navíc platí, že*[2] $u \in \mathcal{C}_x^\infty(Q_T) \cap \mathcal{C}_t^2(Q_T)$*, a dále*

$$\|u\|_{\mathcal{C}(\overline{Q_T})} \le \|\varphi\|_{\mathcal{C}(\mathbb{R}^d)} + T\,\|f\|_{\mathcal{C}(\overline{Q_T})}\,. \tag{4.7}$$

[2] Indexem u prostoru spojitých funkcí míníme to, že u derivujeme pouze podle x, resp. podle t.

Důkaz. Studentská verze.

Zavedeme označení

$$u_1(x,t) = \int_{\mathbb{R}^d} G(x-y,t)\varphi(y)\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} \varphi(y)\mathrm{d}y$$

$$u_2(x,t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} G(x-y,t-\tau)f(y,\tau)\mathrm{d}y\mathrm{d}\tau = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{(4\pi(t-\tau))^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-\tau)}} f(y,\tau)\mathrm{d}y\mathrm{d}\tau.$$

Tyto integrály upravíme substitucí $u = -\frac{x-y}{(4t)^{\frac{1}{2}}}$ s $\mathrm{d}y = (4t)^{\frac{d}{2}}\mathrm{d}u$, resp. $u = -\frac{x-y}{(4(t-\tau))^{\frac{1}{2}}}$ s $\mathrm{d}y = (4(t-\tau))^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}u$, čímž dostaneme vyjádření

$$u_1(x,t) = \frac{1}{\pi^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-|u|^2} \varphi(x+2u\sqrt{t})\mathrm{d}u\,,$$

$$u_2(x,t) = \frac{1}{\pi^{\frac{d}{2}}} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} e^{-|u|^2} f(x+2u\sqrt{t-\tau},\tau)\mathrm{d}u\mathrm{d}\tau\,.$$

Jednu z výhod těchto úprav, a sice, že se závislost na čase přesunula ze jmenovatelů zlomků dodovnitř do funkcí φ resp. f, oceníme hned v následujícím kroku.

Krok 1: Odhady

Nejdříve provedeme odhady $\forall (x,t) \in Q_T$

$$|u_1(x,t)| \leq \frac{1}{\pi^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} \left| e^{-|u|^2} \varphi(x+2u\sqrt{t}) \right| \mathrm{d}u \leq \sup_{y\in\mathbb{R}^d} |\varphi(y)| \frac{1}{\pi^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-|u|^2}\mathrm{d}u = \|\varphi\|_{\mathcal{C}(\mathbb{R}^d)},$$

tudíž $\|u_1\|_{\mathcal{C}(Q_T)} \leq \|\varphi\|_{\mathcal{C}(\mathbb{R}^d)}$. Obdobně postupujeme v odhadu pro $u_2(x,t)$, jest

$$\begin{aligned}
|u_2(x,t)| &\leq \frac{1}{\pi^{\frac{d}{2}}} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \left| e^{-|u|^2} f(x+2u\sqrt{t-\tau},\tau) \right| \mathrm{d}u\mathrm{d}\tau \\
&\leq \sup_{(y,\tau)\in Q_T} |f(y,\tau)| \int_0^t \left(\frac{1}{\pi^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-|u|^2}\mathrm{d}u \right) \mathrm{d}\tau \\
&= \|f\|_{\mathcal{C}(Q_T)} \int_0^t \mathrm{d}\tau \leq t\|f\|_{\mathcal{C}(Q_T)} \leq T\|f\|_{\mathcal{C}(Q_T)},
\end{aligned}$$

odkud $\|u_2\|_{\mathcal{C}(Q_T)} \leq T\|f\|_{\mathcal{C}(Q_T)}$. Protože $u(x,t)$ je součtem funkcí $u_1(x,t)$ a $u_2(x,t)$ na Q_T resp. je rovná $\varphi(x)$ pro $t=0$, dostaneme použitím trojúhleníkové nerovnosti požadovaný odhad z věty.

Krok 2: Vlastnosti funkci u_1 a u_2

Dále se budeme zabývat funkcemi $u_1(x,t)$ a $u_2(x,t)$ odděleně. Budeme hojně využívat vět o spojitosti integrálu podle parametru a derivaci integrálu podle parametru. Můžeme si uvědomit, že snadné použití těchto vět bude důsledkem dodatečných předpokladů na funkce $f(x,t)$ a $\varphi(x)$ oproti původní formulaci Cauchyho úlohy v Definici (4.1.1).

Chtěli bychom ukázat, že funkce $u_1(x,t)$ řeší úlohu

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} - \Delta u_1 &= 0 \quad \text{v } Q_T\,, \\ u_1(x,0) &= \varphi(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d\,, \end{aligned}$$

zatímco funkce $u_2(x,t)$ je řešením úlohy

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_2}{\partial t} - \Delta u_2 &= f \quad \text{v } Q_T\,, \\ u_2(x,0) &= 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^d\,. \end{aligned}$$

V obou případech se počáteční podmínky nabývají ve smyslu limity. Díky linearitě rovnice vedení tepla pak bude součet funkcí u_1+u_2 řešením Cauchyho úlohy z Definice (4.1.1).

Krok 2a: Spojitost a nabývání okrajových podmínek pro u_1

Obraťme nyní svou pozornost na funkci $u_1(x,t)$. O její spojitosti v Q_T nelze pochybovat. Zde však požadujeme spojitost v $\overline{Q_T}$. Na hranici Q_T (tzn. v bodech $(x,0)$) je funkce $u(x,t)$ definována jako $\varphi(x)$. Je tedy třeba ukázat, že $\forall x_0 \in \mathbb{R}^d$ platí

$$\lim_{\substack{(x,t)\to(x_0,0+)\\(x,t)\in Q_T}} u_1(x,t) = \varphi(x_0),$$

aneb podle definice limity chceme ukázat, že vhodnou volbou okolí $\mathcal{U}_{x,t}(x_0,0)$ lze výraz $|u_2(x,t)-\varphi(x_0)|$ libovolně zmenšit. Uvědomíme si, že „velikost“ okolí $\mathcal{U}_{x,t}$ je určena jeho „prostorovým“ a „časovým“ rozměrem. Začneme s odhady.

$$|u_1(x,t)-\varphi(x_0)| \le |u_1(x,t)-\varphi(x)| + |\varphi(x)-\varphi(x_0)|$$

Druhý sčítanec lze učinit menším než $\frac{\varepsilon}{3}$, pokud zvolíme dostatečně malý „prostorový“ rozměr okolí $\mathcal{U}_{x,t}(x_0,0)$, neboť funkce $\varphi(x)$ je spojitá. Pro člen $|u_2(x,t)-\varphi(x)|$ máme

$$\begin{aligned} |u_1(x,t)-\varphi(x)| &= \left|\left(\frac{1}{\pi^{\frac{d}{2}}}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-|u|^2}\varphi(x+2u\sqrt{t})\mathrm{d}u\right) - \varphi(x)\right| \\ &= \left|\frac{1}{\pi^{\frac{d}{2}}}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-|u|^2}\left(\varphi(x+2u\sqrt{t})-\varphi(x)\right)\mathrm{d}u\right|, \end{aligned}$$

normu tohoto integrálu odhadneme shora integrálem z normy a ten rozepíšeme na

$$\frac{1}{\pi^{\frac{d}{2}}}\int_{|u|\ge R} e^{-|u|^2}\left|\varphi(x+2u\sqrt{t})-\varphi(x)\right|\mathrm{d}u + \frac{1}{\pi^{\frac{d}{2}}}\int_{|u|\le R} e^{-|u|^2}\left|\varphi(x+2u\sqrt{t})-\varphi(x)\right|\mathrm{d}u\,.$$

První z integrálů lze odhadnout $\frac{\varepsilon}{3}$ pokud zvolíme vhodné (rozuměj velké) R (neboť integrál přes celé $\mathbb{R}^d$ je konečný). Druhý integrál (zde již je u omezené) učiníme menším než $\frac{\varepsilon}{3}$ tak, že rozumně zvolíme poslední volný parametr – časový rozměr

okolí $\mathcal{U}_{x,t}(x_0, 0)$ – a využijeme stejnoměrné spojitosti φ.
Krok 2b: Funkce u_1 řeší rovnici, spojitost derivací

Dále bychom chtěli o $u_1(x,t)$ dokázat, že řeší rovnici vedení tepla s nulovou pravou stranou. Skutečně, použijeme–li větu o derivaci integrálu podle parametru, dostaneme

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} - \Delta u_1 = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\frac{\partial G(x-y,t)}{\partial t} - \Delta G(x-y,t) \right) \varphi(y) \mathrm{d}y = 0,$$

neboť Greenova funkce je řešením rovnice vedení tepla s nulovou pravou stranou. Pokud jde o hladkost funkce $u_1(x,t)$, tak opět využijeme větu o derivaci integrálu podle parametru, čímž přeneseme veškeré derivování na Greenovu funkci, která je z $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d \times (0,+\infty))$. Platí tedy $u_1 \in \mathcal{C}^\infty_x(Q_T) \cap \mathcal{C}^\infty_t(Q_T)$.
Krok 2c: Spojitost a nabývání okrajových podmínek pro u_2

O funkci $u_1(x,t)$ již víme vše, co jsme potřebovali, a proto se začneme zabývat funkcí $u_2(x,t)$. O spojitosti v Q_T nelze pochybovat, navíc lze dodefinovat $u_2(x,0) \equiv 0$. Tato funkce je evidentně spojitá v $\overline{Q_T}$, neboť

$$\lim_{\substack{(x,t)\to(x_0,0+) \\ (x,t)\in Q_T}} u_2(x,t) = 0,$$

o čemž se lze přesvědčit z odhadu $|u_2(x,t)| \le t\|f\|_{\mathcal{C}(Q_T)}$, který jsme odvodili v Kroku 1.
Krok 2d: Funkce u_2 je řeší rovnici, spojitost derivací

Spojitost *prostorových* derivací funkce $u_2(x,t)$ je opět důsledkem věty o derivaci integrálu podle parametru, protože prostorové derivace přesuneme na Greenovu funkci, která má požadovanou nekonečnou hladkost. Je tedy $u_2 \in \mathcal{C}^\infty_x(Q_T)$. S časovými derivacemi je situace složitější. První časovou derivaci spočteme podle definice (bude se to hodit, až budeme dokazovat, že $u_2(x,t)$ řeší rovnici)

$$\frac{\partial u_2}{\partial t}(x,t) = \lim_{h\to 0} \frac{u_2(x,t+h) - u_2(x,t)}{h},$$

diferenční podíl rozepíšeme jako součet dvou členů, a sice $\frac{u_2(x,t+h)-u_2(x,t)}{h} = I_1 + I_2$,

$$I_1 = \frac{1}{\pi^{\frac{d}{2}}} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} e^{-|u|^2} \frac{f(x+2u\sqrt{(t+h)-\tau},\tau) - f(x+2u\sqrt{t-\tau},\tau)}{h} \mathrm{d}u\mathrm{d}\tau$$

a

$$I_2 = \frac{1}{\pi^{\frac{d}{2}}} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{-|u|^2} f(x+2u\sqrt{(t+h)-\tau},\tau) \mathrm{d}u \right)}_{\mathcal{F}(\tau)} \mathrm{d}\tau.$$

Co lze udělat s prvním členem? V první členu jsme již zvolili zápis, který je připraven k použití Lagrangeovy věty o střední hodnotě. Označme si $\Phi(\phi) := f(x + 2u\sqrt{(t+\phi)-\tau}, \tau)$ funkci Φ na intervalu $\phi \in (0,h)$. Podle Lagrangeovy věty o střední hodnotě (je-li $\Phi(\phi)$ spojitá v uzavřeném intervalu $[0,h]$ a má spojitou derivaci v otevřeném intervalu $(0,h)$, pak existuje takové $\phi^* \in (0,h)$, že platí $\frac{\Phi(h)-\Phi(0)}{h} = \frac{d\Phi}{d\phi}(\phi^*)$), pak v našem případě dostaneme existenci $\phi^* \in (0,h)$ takového, že

$$\frac{f(x+2u\sqrt{(t+h)-\tau},\tau) - f(x+2u\sqrt{t-\tau},\tau)}{h}$$
$$= \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial x_i}\left(x+2u\sqrt{(t+\phi^*)-\tau},\tau\right)\frac{u_i}{\sqrt{(t+\phi^*)-\tau}}.$$

V prvním členu nyní můžeme limitu pro $h \to 0$ (tudíž také $\phi^* \to 0$) zaměnit s integrálem, a dospějeme k výsledku pro I_1:

$$\lim_{h\to 0} I_1 = \frac{1}{\pi^{\frac{d}{2}}}\int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} e^{-|u|^2}\sum_{i=1}^{d}\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(x+2u\sqrt{t-\tau},\tau\right)\frac{u_i}{\sqrt{t-\tau}}\mathrm{d}u\mathrm{d}\tau$$

Při výpočtu členu I_2 použijeme první větu o střední hodnotě v integrálním počtu, která tvrdí, že je–li $\mathcal{F}$ spojitá na $[t,t+h]$, pak existuje takové $\tau^* \in (t,t+h)$, že platí

$$\int_t^{t+h} \mathcal{F}(\tau)\mathrm{d}\tau = h\mathcal{F}(\tau^*),$$

Zápis I_2 byl opět zvolen tak, že použití věty je zřejmé. Provedeme–li limitu pro $h \to 0$ (tudíž také $\tau^* \to t$), dospějeme k výsledku pro I_2:

$$\lim_{h\to 0} I_2 = \lim_{h\to 0}\frac{1}{\pi^{\frac{d}{2}}}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-|u|^2} f(x+2u\sqrt{(t+h)-\tau^*},\tau^*)\mathrm{d}u = f(x,t)\,.$$

Celkem máme

$$\frac{\partial u_2}{\partial t}(x,t) = \frac{1}{\pi^{\frac{d}{2}}}\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d} e^{-|u|^2}\sum_{i=1}^{d}\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(x+2u\sqrt{t-\tau},\tau\right)\frac{u_i}{\sqrt{t-\tau}}\mathrm{d}u\mathrm{d}\tau + f(x,t)\,.$$

Chceme ověřit, že $u_2(x,t)$ řeší rovnici $\frac{\partial u_2}{\partial t} - \Delta u_2 = f$, nezbyde nám proto nic jiného než spočíst Δu_2 a vyjádřit Δu_2 tak, aby to bylo srovnatelné s právě odvozeným vztahem pro $u_{2,t}$. Jest (opět derivujeme integrál podle parametru):

$$\Delta u_2(x,t) = \sum_{i=1}^{d}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_i^2}(x,t) = \frac{1}{\pi^{\frac{d}{2}}}\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d} e^{-|u|^2}\sum_{i=1}^{d}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x+2u\sqrt{t-\tau},\tau)\mathrm{d}u\mathrm{d}\tau\,.$$

Použijeme následující pozorování:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x+2u\sqrt{t-\tau},\tau) = \frac{\partial}{\partial u_i} f(x+2u\sqrt{t-\tau},\tau)\frac{1}{2\sqrt{t-\tau}}$$

s jehož pomocí lze pokračovat

$$\Delta u_2(x,t) = \frac{1}{\pi^{\frac{d}{2}}}\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d} e^{-|u|^2}\sum_{i=1}^{d}\frac{\partial}{\partial u_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(x+2u\sqrt{t-\tau},\tau)\right)\frac{1}{2\sqrt{t-\tau}}\mathrm{d}u\mathrm{d}\tau.$$

Nyní provedeme integraci per partes s derivací podle u_i (hraniční člen vymizí) a výsledkem bude

$$-\frac{1}{\pi^{\frac{d}{2}}}\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d}\sum_{i=1}^d \frac{\partial e^{-|u|^2}}{\partial u_i}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x+2u\sqrt{t-\tau},\tau)\frac{1}{2\sqrt{t-\tau}}\mathrm{d}u\mathrm{d}\tau,$$

z čehož po provedení parciální derivace exponenciály plyne

$$\Delta u_2(x,t)=\frac{1}{\pi^{\frac{d}{2}}}\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d} e^{-|u|^2}\sum_{i=1}^d\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(x+2u\sqrt{t-\tau}\right)\frac{u_i}{\sqrt{t-\tau}}\mathrm{d}u\mathrm{d}\tau.$$

Srovnáme-li tento vztah s dříve odvozeným vztahem pro $\partial u_2 - \partial t$, zjistíme, že skutečně platí $\frac{\partial u_2}{\partial t}-\Delta u_2=f$. □

Poznámka 4.1.7 Předpoklady na f lze zeslabit, pouhá spojitost však nestačí (podrobněji viz např. [11]). Hladkost u podle prostorových derivací je bez ohledu na hladkost f vždy nekonečná, hladkost u podle časových derivací je stejná, jako hladkost f podle časových derivací (to plyne přímo z rovnice, když si z ní vypočítáme $\frac{\partial u}{\partial t}$ a máme již dokázáno, že $u\in\mathcal{C}^\infty_x(Q_T)$).

Jednoznačnost řešení Cauchyovy rovnice ve vhodné třídě řešení bude plynout z principu maxima. Ten dokážeme nejprve pro případ počátečně-okrajové úlohy, tedy pro omezenou oblast Ω. V našem rychlokurzu rovnicí vedení tepla zůstane otevřena otázka existence klasického řešení na omezené oblasti. Čtenáře můžeme ujistit, že klasická řešení existují, a odkázat jej na vhodnou literaturu.

Věta 4.1.8 (Slabý princip maxima pro počátečně-okrajovou úlohu) *Buď u klasické řešení úlohy* (4.3)–(4.4), *ve které klademe $f\equiv 0$. Potom u nabývá svého maxima a minima na parabolické hranici Γ.*

Důkaz. Studentské texování.

Označme $M=\max\limits_{(x,t)\in\overline{Q_T}}u(x,t)$ a $m=\max\limits_{(x,t)\in\Gamma}u(x,t)$, buď (x_M,t_M) bod ve kterém se nabývá hodnoty M. Důkaz provedeme sporem, předpokládáme tedy, že platí $m<M$, neboli $(x_M,t_M)\notin\overline{Q_T}\setminus\Gamma$. Definujeme funkci

$$v(x,t):=u(x,t)+\frac{M-m}{2h^2}\|x-x_M\|^2,$$

kde $h=\operatorname{diam}Q_T$ je průměr (omezené množiny) Q_T. Pro tuto funkci pak platí:

- $v(x_M,t_M)=u(x_M,t_M)=M$
- $\forall(x,t)\in\Gamma:\ v(x,t)\le u(x,t)+\frac{M-m}{2}\le m+\frac{M-m}{2}<M$,

z čehož plyne, že funkce $v(x,t)$ nabývá svého maxima někde v $\overline{Q_T} \setminus \Gamma$, nechť je to v bodě (x_V, t_V). Protože tento bod je maximem hladké funkce $v(x,t)$, musí v tomto bodě být

- $\forall i = 1, \ldots, d: \ \frac{\partial^2 v}{\partial {x_i}^2}(x_V, t_V) \leq 0$
- $\frac{\partial v}{\partial t}(x_V, t_V) = 0$ pokud je $(x_V, t_V) \in Q_T$ resp. $\frac{\partial v}{\partial t}(x_V, t_V) \geq 0$ pokud $(x_V, t_V) \in \partial Q_T \setminus \Gamma$. Skutečně lze mluvit o hodnotách na $\partial Q_T \setminus \Gamma$, neboť $\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}$, $\frac{\partial u}{\partial t} \in \mathcal{C}(\overline{Q_T} \setminus \Gamma)$, viz Definice (4.1.2).

Odtud plyne, že

$$\left(\frac{\partial v}{\partial t} - \Delta v \right) (x_V, t_V) \geq 0.$$

Pokud ale počítáme přímo s definicí funkce $v(x,t)$ dostaneme (neboť $u(x,t)$ je řešením rovnice vedení tepla a $\Delta \|x - x_M\|^2 = 2d$)

$$\left(\frac{\partial v}{\partial t} - \Delta v \right) (x_V, t_V) = -d \frac{M - m}{h^2} < 0,$$

čímž jsme dospěli ke sporu. □

Důsledek 4.1.9 (Jednoznačnost počátečně-okrajové úlohy pro rovnici vedení tepla) *Klasická úloha vedení tepla na omezené oblasti* (4.3)–(4.4) *má nejvýše jedno řešení.*

Důkaz. Pro rozdíl $w = u_1 - u_2$ dvou řešení (4.3)–(4.4) ukážeme pomocí Věty 4.1.8 snadno $w \equiv 0$. □

S využitím Věty 4.1.8 můžeme také ukázat princip maxima pro Cauchyovu úlohu.

Věta 4.1.10 (Slabý princip maxima pro Cauchyovu úlohu) *Buď u klasické řešení úlohy* (4.1)–(4.2)*, ve které klademe $f \equiv 0$. Jsou-li navíc funkce u a φ omezené (na $\overline{Q_T}$ resp. $\mathbb{R}^d$), pak*

$$\inf_{\mathbb{R}^d} \varphi \leq u(x,t) \leq \sup_{\mathbb{R}^d} \varphi \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^d\,,\ t \geq 0\,. \tag{4.8}$$

Důkaz. S využitím Věty 4.1.8. Důkaz zatím chybí, doplnit. □

Důsledek 4.1.11 (Jednoznačnost Cauchyovy úlohy pro RVT) *Klasická Cauchyova úloha vedení tepla na omezené oblasti* (4.1)–(4.2) *má ve třídě omezených řešení nejvýše jedno řešení. Toto řešení je pak nutně dáno vzorcem* (4.6).

Poznámka 4.1.12 Existují neomezená řešení Cauchyovy úlohy pro rovnici vedení tepla, která vykazují růst $|u(x,t)| \approx c_1 \exp(c_2 x^{2+\epsilon})$, pro která neplatí princip maxima, a tedy nelze v této třídě řešení také zaručit jednoznačnost. Lze však ukázat, že ve třídě klasických řešení, charakterizovaných růstovou podmínkou $|u(x,t)| \leq c_1 \exp(c_2 x^2)$ již princip maxima, a tedy i jednoznačnost řešení, platí.

4.2 Vlnová rovnice

Definice 4.2.1 (Cauchyova úloha pro vlnovou rovnici) *Buď $\Omega = \mathbb{R}^d$, $T > 0$, $Q_T := \Omega \times (0,T)$, $f \in \mathcal{C}(Q_T)$, φ_0, $\varphi_1 \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^d)$. Buď $c > 0$. Řekneme, že $u : \overline{Q_T} \to \mathbb{R}$ je klasickým řešením Cauchyovy úlohy pro vlnovou rovnici, pokud*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \, \Delta u = f \,, \qquad x \in \mathbb{R}^d \,,\ t > 0 \,, \tag{4.9}$$

$$u(\cdot, 0) = \varphi_0(x) \,, \qquad x \in \mathbb{R}^d \,, \tag{4.10}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, 0) = \varphi_1(x) \,, \qquad x \in \mathbb{R}^d \,, \tag{4.11}$$

a přitom $u \in \mathcal{C}^2(\overline{Q_T})$, u, $\frac{\partial u}{\partial t} \in \mathcal{C}(\overline{Q_T})$.

Poznámka 4.2.2 V případě vlnové rovnice se budeme zabývat pouze Cauchyovou úlohou a nikoli úlohou na omezené množině Ω. Důvodem je skutečnost, že u hyperbolické rovnice je zadání okrajových podmínek na hranici Ω obtížné z důvodů, které se pokusíme v této poznámce objasnit:

V souladu s druhou kapitolou (viz § 2.3) lze nalézt charakteristické směry rovnice (4.9) jako nenulové vektory $\xi = (\xi_0, \ldots, \xi_d) \in \mathbb{R}^{d+1}$, splňující $\xi_0^2 = c^2 \sum_{j=1}^d \xi_j^2$. Takové vektory existují, existují tedy i charakteristické plochy (charakteristiky) naší rovnice. Například v jedné prostorové dimenzi, a uvažujeme-li pro jednoduchost $c = 1$, prochází každým časoprostorovým bodem $[x_0, t_0]$, $t_0 \geq 0$, dvojice charakteristik, kterými jsou (polo)přímky o směrnicích $+1$ a -1. Informace o hodnotě počáteční podmínky φ_0 se šíří ve směru charakteristik, „šikmo oběma směry“. Kdyby byla zadána úloha na omezeném prostorovém intervalu, ležel by každý bod boční strany časoprostorového válce zároveň na nějaké charakteristice, nesoucí informaci o počáteční podmínce. K bokům časoprostorového válce by tak „ve vlnách“ (což samozřejmě souvisí s názvem rovnice) přicházely informace o hodnotách řešení na nižších časových hladinách a jiných místech prostoru. Proto by na bocích časoprostorového válce nebylo možno předepsat libovolnou okrajovou podmínku. Bylo by samozřejmě možné uvažovat o tom, jak matematicky podchytit dvě rozdílné fyzikální představy, a sice, že boční stěna přicházející vlnu „pohltí“, nebo „odrazí“, takové úvahy jdou však nad rámec této přednášky, ve které se tedy budeme zabývat pouze případem celého prostoru.

Rozmyslete si, že v obecném d-rozměrném případě jsou charakteristickými plochami kuželové plochy, a že daným časoprostorovým bodem $[x_0, t_0]$ procházejí (až na případ $t_0 = 0$) dvě takové, jedna „stojící na špičce“, kterou je bod $[x_0, t_0]$ — ta je „otevřená směrem nahoru“ ve směru časů $t > t_0$. Pokud je $t_0 > 0$, je onou druhou plochou omezená kuželová plocha, jejíž základna leží na časové hladině $t = 0$ a jejímž vrcholem je bod $[x_0, t_0]$.

V následujícím ukážeme, že Cauchyova úloha (4.9)–(4.11) má ve třídě dostatečně hladkých funkcí nejvýše jedno klasické řešení. Pro potřeby následující věty, která k tomuto výsledku bezprostředně vede, si uvědomme, že bez újmy na teoretické obecnosti[3] lze v (4.9) klást $c = 1$. Skutečně, po zavedení nové časové proměnné $t' = ct$ a nové funkce $\widetilde{f} = f/c^2$ přejde (4.9) v rovnici $\frac{\partial^2 u}{\partial t'^2} - \Delta u = \widetilde{f}$.

Označme nyní pro $r > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}^d$

$$Z_r(x_0) := \{[x,t]\,;\ 0 < t < r\,,\ |x - x_0| < r - t\}\,. \tag{4.12}$$

Věta 4.2.3 *Nechť $u \in \mathcal{C}^2(\overline{Z_r(x_0)})$ splňuje v $Z_r(x_0)$ rovnici $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0$. Nechť dále $u(x,0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$ pro $|x - x_0| \le r$. Potom $u \equiv 0$ v $\overline{Z_r(x_0)}$.*

Důkaz. Zatím chybí. □

Důsledek 4.2.4 (Jednoznačnost řešení Cauchyovy úlohy pro vlnovou rovnici) *Ve třídě $\mathcal{C}^2(\overline{Q_T})$ má Cauchyova úloha* (4.9)–(4.11) *nejvýše jedno řešení.*

Důkaz. Jsou-li u_1, u_2 dvě taková řešení, položíme $w := u_1 - u_2$. Buď $[x,t] \in \mathbb{R}^d \times (0,T)$ libovolný bod. Pak existuje kužel $Z_r(x_0)$, jehož vrcholem je bod $[x,t]$. Podle předchozí Věty 4.2.3 $w \equiv 0$ v $\overline{Z_r(x_0)}$, speciálně tedy $w(x,t) = 0$, což jsme chtěli dokázat. □

Na závěr tohoto paragrafu, v jeho „existenční části“, si uvedeme explicitní vzorce pro řešení Cauchyovy úlohy v dimenzích 1, 2 a 3, a naznačíme způsob, jakým se dají odvodit. Zájemce o přesnější odvození odkazujeme na [23] nebo [2].

Buď $c > 0$. Analogicky jako pro rovnici vedení tepla, najdeme i v případě vlnové rovnice její tzv. elementární řešení (Greenovu funkci) $E(x,t)$, splňující ve smyslu distribucí Cauchyovu úlohu (4.9)–(4.11), ve které klademe $f = 0$, $\varphi_0 = 0$, $\varphi_1 = \delta$. Metodou Fourierovy transformace lze ukázat, že (až na konstanty, které souvisejí s konkrétní volbou konstant u transformace) pro Fourierovu transformaci $\widehat{E}(\xi,t)$ funkce $E(x,t)$ platí (transformace probíhá mezi proměnnými $x \mapsto \xi$):

$$\widehat{E}(\xi,t) = \frac{\sin(2\pi c|\xi| t)}{2\pi c|\xi|}\,.$$

Ukazuje se, že nalezení zpětné Fourierovy transformace této funkce je technický, ale proveditelný problém, jehož realizace je závislá na dimenzi prostoru. Po nalezení $E(x,t)$ pak lze ukázat, že řešení problému (4.9)–(4.11) je dáno formální konvolucí (obecně počítanou ve smyslu distribucí, index pod znamením konvoluce naznačuje, přes jaké proměnné konvoluci počítáme)

$$u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\Big(E \underset{x}{*} \varphi_0\Big) + (E \underset{x}{*} \varphi_1) + \Big(Y(t)\, E \underset{x,t}{*} f\Big) =: u_0 + u_1 + u_2\,, \tag{4.13}$$

[3] Později nás budou zajímat explicitní vzorce pro řešení, kde již, pro pohodlí jejich uživatelů, budeme uvažovat obecné $c > 0$.

srovnejte se vzorcem (4.6). Zde $Y(t)$ označuje Heavisideovu funkci v proměnné t, $Y(t) = 1$ pro $t \geq 0$, $Y(t) = 0$ pro $t < 0$.

Po dalších technických výpočtech lze odvodit explicitní tvar řešení $u(x,t)$ v závislosti na konkrétní dimenzi.

Obecné řešení úlohy (4.9)–(4.11) v jedné prostorové dimenzi je například dáno známým d'Alembertovým vzorcem:

$$u(x,t) = \frac{\varphi_0(x-ct) + \varphi_0(x+ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \varphi_1(y)\,\mathrm{d}y + \frac{1}{2c}\int_0^t \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} f(y,\tau)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\tau\,. \tag{4.14}$$

Pro $f \equiv 0$ lze tento vzorec snadno odvodit i elementárně: v jedné dimenzi řešíme rovnici

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0\,. \tag{4.15}$$

Zavedením nových souřadnic

$$\eta = \frac{x+ct}{2}\,, \qquad \xi = \frac{x-ct}{2}$$

přejde rovnice (4.15) v rovnici

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} = 0\,,$$

jejíž obecné řešení je $u(\eta,\xi) = F(\xi) + G(\eta)$, kde F a G jsou libovolné dostatečně hladké funkce. V původních proměnných tedy dostáváme, že rovnici (4.15) vyhovuje každá funkce tvaru

$$u(x,t) = F(x-ct) + G(x+ct)\,,$$

kde F a G jsou libovolné dostatečně hladké funkce. S využitím počátečních podmínek odtud dostaneme (4.14) s $f = 0$. Čtenář se jistě nebude zlobit, když jej autor nechá tento oblíbený výpočet dokončit.

… a to je zatím vše.

Literatura

[1] P. Čihák, J. Kopáček: *Příklady z matematiky pro fyziky V*. Skriptum MFF UK, Matfyzpress Praha, 2002.

[2] P. Čihák a kol.: *Matematická analýza pro fyziky V*. Skriptum MFF UK, Matfyzpress, Praha, 2001.

[3] E. DiBenedetto: *Partial Differential Equations*. Birkhäuser, 1995.

[4] P. Doktor, O. John, J. Kopáček: *Příklady z matematické analýzy VI, parciální diferenciální rovnice*. Skriptum MFF UK, SPN, Praha, 1983.

[5] L. C. Evans: *Partial differential equations*. AMS, Providence, 1998.

[6] H. Gajewski, K. Gröger and K. Zacharias: *Nichtlineare Operatorgleichungen und Operatordifferentialgleichungen*. Akademie–Verlag, Berlin, 1974 (německy).

[7] I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik: *Table of integrals, series, and products*. Academic Press, San Diego, 2000 (6. vydání).

[8] L. L. Helms: *Introduction to potential theory*. John Wiley & Sons, 1969.

[9] V. Jarník: *Integrální počet II*. Academia, Praha, 1984.

[10] V. Jarník: *Diferenciální počet II*. Academia, Praha, 1976 .

[11] O. John, J. Nečas: *Rovnice matematické fyziky*. Skriptum MFF UK, SPN, Praha, 1977.

[12] J. Král, I. Netuka, J. Veselý: *Teorie potenciálu II*. Skriptum MFF UK, SPN, Praha, 1972.

[13] J. Kurzweil: *Obyčejné diferenciální rovnice*. TKI, SNTL, Praha, 1978.

[14] J. Lukeš: *Zápisky z funkcionální analýzy*. Karolinum, Praha, 1998.

[15] J. Lukeš, J. Malý: *Míra a integrál*. Univerzita Karlova, Praha, 1993. V anglické verzi *Measure and Integral*, Matfyzpress, Praha, 1995.

[16] J. Mařík: Dirichletova úloha. *Časopis pro pěstování matematiky*, **82**, č. 3, 257–282 (1957).

[17] J. Milota, S. Fučík: *Matematická analýza II. Diferenciální počet funkcí více proměnných*. Skriptum MFF UK, SPN Praha, 1980 (2. vydání).

[18] K. Rektorys: *Přehled užité matematiky I,II*, 6. přepracované vydání. Prometheus, Praha, 1995.

[19] M. Renardy, R.C. Rogers: *An Introduction to Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 1993.

[20] L. Schwartz: *Matematické metody ve fyzice*. SNTL, Praha, 1972.

[21] A. N. Tichonov, A. A. Samarskij: *Uravnenija matematiceskoj fiziki*. Moskva, 1951.

[22] V. S. Vladimirov: *Obobščennyje funkcii v matematičeskou fizike*. Nauka, Moskva, 1976.

[23] V. S. Vladimirov: *Uravnenija matematiceskoj fiziki*. 4. přepracované a doplněné vydání, Nauka, Moskva, 1981.

[24] K. Yosida: *Functional Analysis*. Springer–Verlag, Berlin–Göttingen–Heidelberg, 1965.