13. cvičení

Považujte za známé následující limity :

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}.$$

Spočtěte následující limity:

$$1.\ \lim_{x\to 1}\frac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1},\quad 2.\ \lim_{x\to 2}\Big(\frac{1}{x(x-2)^2}-\frac{1}{x^2-3x+2}\Big),$$

$$3.\ \lim_{x\to 0}\frac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}\ \text{pro } m,n\in\mathbf{N},\quad 4.\ \lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+2^x)}{x},$$

$$5.\ \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}},\quad 6.\ \lim_{x\to -2}\frac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}.$$

Výsledky a návody:

$$1.\ \frac{49}{24};=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^{99}+x^{98}+\cdots+x^2+x-1)}{(x-1)(x^{49}+x^{48}+\cdots+x^2+x-1)}$$

$$2.\ \infty;=\lim_{x\to 2}\Big(\frac{1}{x(x-2)^2}-\frac{1}{(x-1)(x-2))}\Big)=\lim_{x\to 2}\frac{(x-1)-(x(x-2))}{x(x-2)^2(x-1)}=\lim_{x\to 2}\frac{-x^2+3x-1}{x(x-2)^2(x-1)}.$$

3. $\frac{nm}{2}(n-m)$; Použijeme binomickou větu. Členy s x^k pro $k>2$ jdou k nule.

$$=\frac{\binom{n}{0}1^n+\binom{n}{1}mx+\binom{n}{2}(mx)^2+\cdots}{x^2}-\frac{\binom{m}{0}1^m+\binom{m}{1}nx+\binom{m}{2}(nx)^2+\cdots}{x^2}.$$

$$4.\ \ln(2);\ \ln 2=\frac{\ln 2^x}{x}\le\frac{\ln(1+2^x)}{x}\le\frac{\ln(2\cdot 2^x)}{x}=\frac{\ln 2+x\ln 2}{x}\overset{x\to\infty}{\to}\ln 2.$$

$$5.\ \frac{4}{3};\ \frac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}\,\frac{\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x}}{\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x}}=\frac{\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x}}{\frac{\sin x}{x}+\frac{1-\cos x}{x^2}}\overset{x\to 0}{\to}\frac{2}{1+\frac{1}{2}}.$$

$$6.\ \frac{1}{144};\lim_{x\to -2}\frac{\sqrt[3]{x-6}-(-2)}{x^3+8}\,\frac{\sqrt[3]{(x-6)^2}+(-2)\sqrt[3]{x-6}+(-2)^2}{\sqrt[3]{(x-6)^2}+(-2)\sqrt[3]{x-6}+(-2)^2}=$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{x-6-(-2)^3}{(x+2)(x^2-2x+4)}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{(x-6)^2}+(-2)\sqrt[3]{x-6}+(-2)^2}=\frac{1}{12}\,\frac{1}{4+4+4}.$$

7. Nechť $f,g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ jsou funkce. Rozhodněte o platnosti následujících implikací.

$A)$ f,g jsou omezené $\Rightarrow f\cdot g$ je omezená.

$B)$ f,g jsou shora omezené $\Rightarrow f\cdot g$ je shora omezená.

$C)$ f,g jsou rostoucí $\Rightarrow f\cdot g$ je rostoucí.

8. Dokažte, že Riemannova funkce

$$D(x)=\begin{cases}\frac{1}{q} & \text{pro } x\in\mathbf{Q},\ x=\frac{p}{q}\ \text{pro } p\in\mathbf{Z},\ q\in\mathbf{N}\ \text{nesoudělná}\\ 0 & \text{pro } x\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}\end{cases}$$

je spojitá na $\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$.

9. Dokažte si větu, že jedna děleno "kladná nula" je ∞. Nechť $\lim_{x\to a} g(x)=0$ a existuje $\delta>0$ tak, že $g(x)>0$ na $P(a,\delta)$. Pak $\lim_{x\to a}\frac{1}{g(x)}=\infty$.