Diferenciální rovnice kolem nás

Petr Kaplický

Den otevřených dveří MFF UK 2012

Praha, 29. 11. 2012

Plán

1. Let Felixe B.
2. Pád (s odporem prostředí)
3. Newtonův problém optimálního aerodynamického profilu

Plán

1. Let Felixe B.
2. Pád (s odporem prostředí)
3. Newtonův problém optimálního aerodynamického profilu

Video a motivace

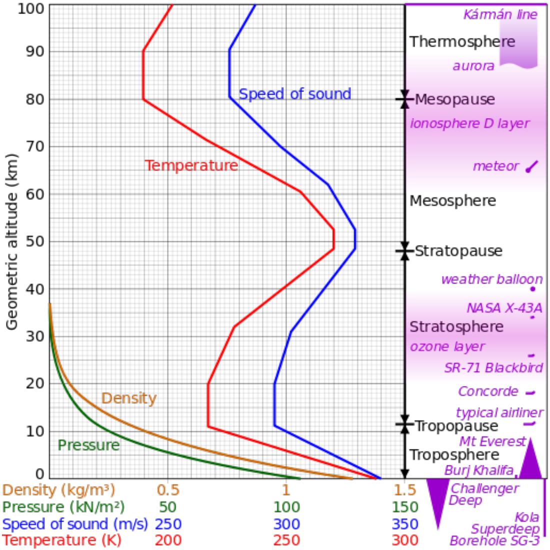
Experimentální data

Skok z výšky 39 km. Doba letu 9:09 min. Z toho volným pádem 4:29 min. Po 33s dosažena rychlost 1130 km h^{-1} (313 m s^{-1}).

Motivace

Překonat volným pádem rychlost zvuku.
Co je to rychlost zvuku a jak je veliká?

Standardní model atmosféry



Plán

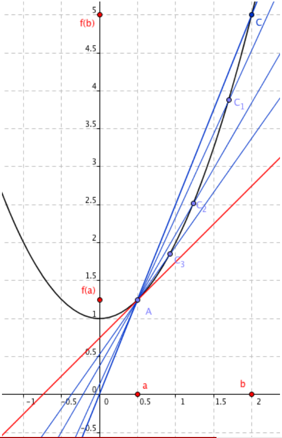
1. Let Felixe B.
2. Pád (s odporem prostředí)
3. Newtonův problém optimálního aerodynamického profilu

Úvod do modelování

- $s(t)$ ... pozice objektu v čase t
- Jak určit rychlost objektu?

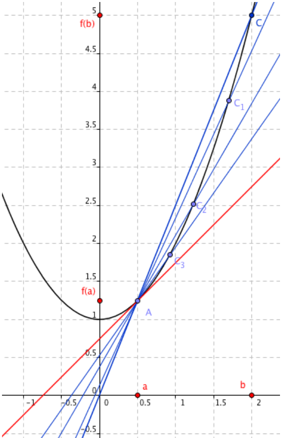
Úvod do modelování

- $s(t)$ . . . pozice objektu v čase t
- Jak určit rychlost objektu?



Úvod do modelování

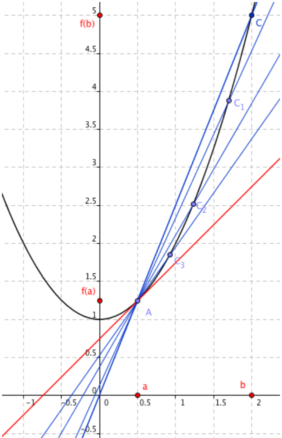
- $s(t)$ ... pozice objektu v čase t
- Jak určit rychlost objektu?



- Rychlost označíme $v = s'$ a zrychlení $a = v'$ (derivace).
- Tyto rovnosti jsou prototypy diferenciálních rovnic, rovnic, ve kterých vystupují derivace.

Úvod do modelování

- $s(t)$ . . . pozice objektu v čase t
- Jak určit rychlost objektu?



- Rychlost označíme $v = s'$ a zrychlení $a = v'$ (derivace).
- Tyto rovnosti jsou prototypy diferenciálních rovnic, rovnic, ve kterých vystupují derivace.
- Jak vypočítat pohyb tělesa o hmotnosti m, na které působí síla F?
- 2. Newtonův pohybový zákon (bilance hybnosti):

$$mv' = F$$

Pád ve stratosféře

- Tíhová síla: $F = mg$, kde $g = 9.8$ m s^{-2} je tíhové zrychlení.
- Pro rychlost Felixe B. dostáváme diferenciální rovnici

$$v'(t) = g \quad \text{pro } t > 0$$

s počáteční podmínkou $v(0) = 0$, řešení je $v(t) = gt$.

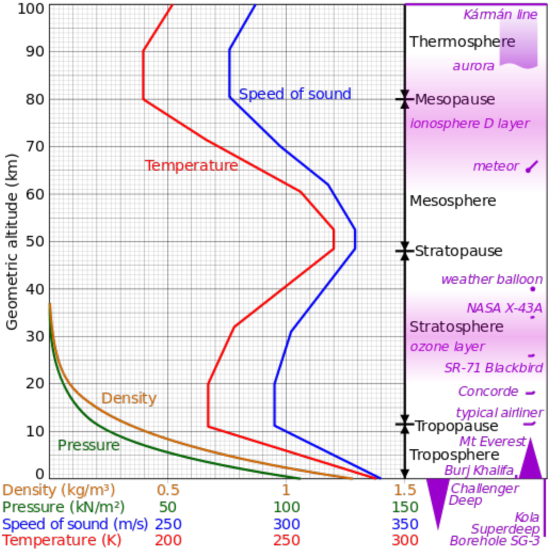
Pád ve stratosféře

- Tíhová síla: $F = mg$, kde $g = 9.8$ m s^{-2} je tíhové zrychlení.
- Pro rychlost Felixe B. dostáváme diferenciální rovnici

$$v'(t) = g \quad \text{pro } t > 0$$

  s počáteční podmínkou $v(0) = 0$, řešení je $v(t) = gt$.
- Po 33 s je tedy rychlost 323,4 m s^{-1}=1164,2 km h^{-1}. Což odpovídá číslu ve zprávě o letu (1130 km h^{-1}).

Standardní model atmosféry



Pád ve stratosféře s odporem prostředí

2. Newtonův pohybový zákon

$$mv' = F, \quad \text{kde } F = F_1 + F_2$$

$F_1 = mg \ldots$ tíhová síla
$F_2 \ldots$ odporová síla prostředí

Pád ve stratosféře s odporem prostředí

2. Newtonův pohybový zákon

$$mv' = F, \quad \text{kde } F = F_1 + F_2$$

$F_1 = mg \ldots$ tíhová síla
$F_2 \ldots$ odporová síla prostředí

Newtonův odporový vzorec

Síla F_2 o velikosti $|F_2| = \frac{1}{2} CS\rho v^2$ působí proti rychlosti pohybu.
$C \ldots$ odporový součinitel
$S \ldots$ průřez objektu
$\rho \ldots$ hustota prostředí

Pád ve stratosféře s odporem prostředí 2

Pro rychlost Felixe B. dostáváme diferenciální rovnici

$$v' = g - \frac{CS\rho v^2}{2m} \quad \text{pro } t > 0$$

s počáteční podmínkou $v(0) = 0$.
Konstanty určíme následovně: $\rho = 0,02$ kg m^3, $C = 1$, $S = 0,5$ m^2, $m = 120$ kg.

Pád ve stratosféře s odporem prostředí 2

Pro rychlost Felixe B. dostáváme diferenciální rovnici

$$v' = g - \frac{CS\rho v^2}{2m} \quad \text{pro } t > 0$$

s počáteční podmínkou $v(0) = 0$.
Konstanty určíme následovně: $\rho = 0,02$ kg m³, $C = 1$, $S = 0,5$ m^2, $m = 120$ kg.

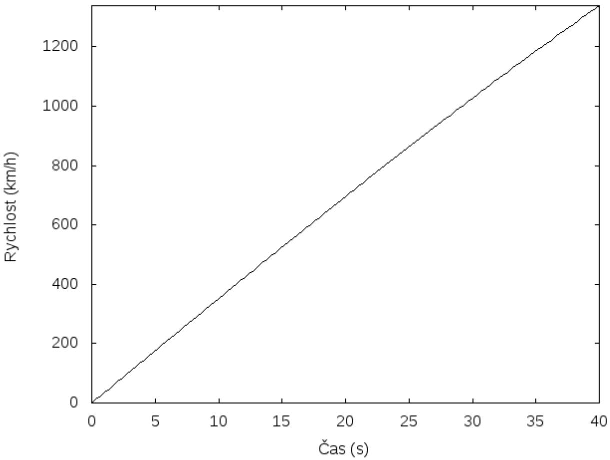
Rovnici lze explicitně vyřešit. Označíme-li $K = \left(\frac{CS\rho}{2mg}\right)^{\frac{1}{2}}$, platí

$$v(t) = \frac{1}{K} \frac{e^{2gKt} - 1}{e^{2gKt} + 1}.$$

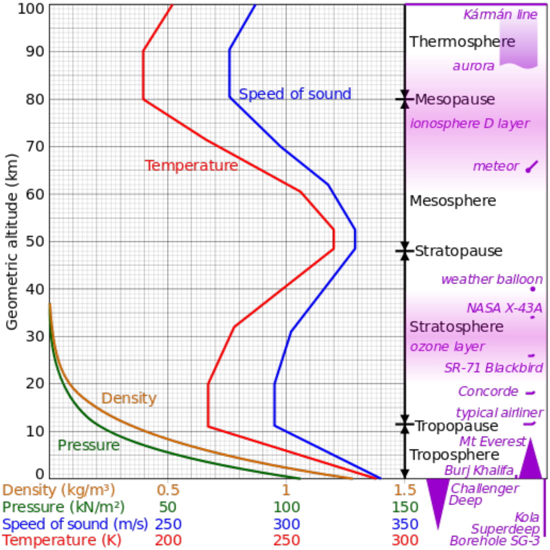
Po dosazení dostaneme: $v(33) = 1123$ km h^{-1} (ve zprávě 1130 km h^{-1}).

Pád ve stratosféře s odporem prostředí 3

Rychlost letu v čase $[0, 40]$ s



Standardní model atmosféry



Pád těsně nad mořem

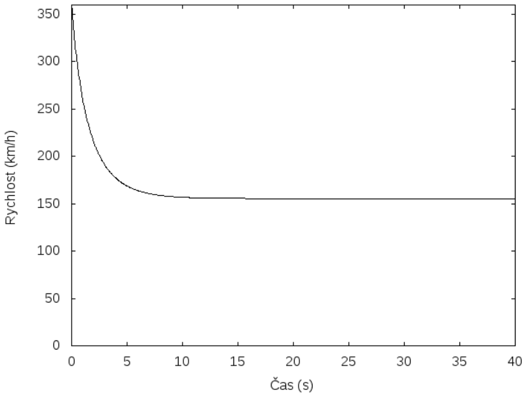
Pro rychlost Felixe B. dostáváme diferenciální rovnici

$$\frac{1}{g}v' = 1 - K^2v^2 \quad \text{pro } t > 0$$

s počáteční podmínkou $v(0) = 0$.

- Na povrchu Země je hustota vzduchu asi $\rho = 1.26$ kg m^{-3}.
- Lze spočítat, že rychlost Felixe B. se s rostoucím časem vždy blíží hodnotě $v_{+\infty} = 1/K$.
- S konstantami $\rho = 1,26$ kg m^{-3}, $C = 1$, $S = 1$ m^2, $m = 120$ kg je $v_{+\infty} = 155$ km h^{-1} .
- Použije-li padák o ploše 25 m^2, bude $v_{+\infty} = 31$ km h^{-1}.

Brždění bez padáku



Modelování celého letu

- Pohyb se stále řídí rovnicí

$$v' = g - \frac{CS\rho v^2}{2m} \quad \text{pro } t > 0$$

s počáteční podmínkou $v(0) = 0$, ale nyní je hustota vzduchu závislá na pozici Felixe B. Hustotu atmosféry určíme pomocí: $\rho(s) = \rho_0 \exp((\rho_0 g(s - 39000)/p_0)$, kde $\rho_0 = 1.26$ kg m^{-3}, $g = 9.8$ m s^{-2}, $p_0 = 101325$ Pa.

Modelování celého letu

- Pohyb se stále řídí rovnicí

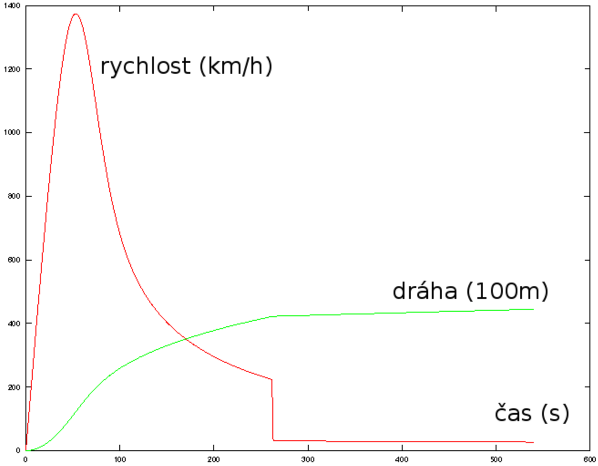
$$v' = g - \frac{CS\rho v^2}{2m} \quad \text{pro } t > 0$$

  s počáteční podmínkou $v(0) = 0$, ale nyní je hustota vzduchu závislá na pozici Felixe B. Hustotu atmosféry určíme pomocí: $\rho(s) = \rho_0 \exp((\rho_0 g(s - 39000)/p_0)$, kde $\rho_0 = 1.26$ kg m^{-3}, $g = 9.8$ m s^{-2}, $p_0 = 101325$ Pa.
- Víme: $s' = v$ a dostáváme pro s rovnici

$$s'' = g - \frac{CS\rho_0 \exp((\rho_0 g(s - 39000)/p_0)(s')^2}{2m} \quad t > 0$$

  s počáteční podmínkou $s(0) = 0$, $s'(0) = 0$.
- Tuto rovnici už neumím řešit analyticky a proto použijeme numerický software.

Průběh celého letu



Plán

Modelování

Jak určit odporový součinitel?

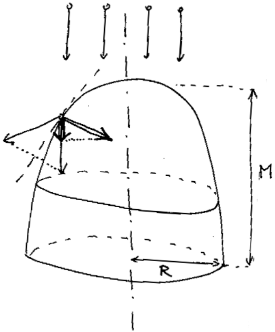
- Newton (1685) řešil následující problém: nalezněte těleso s minimálním odporem vzduchu.
- Co to je minimální odpor vzduchu?

Modelování

Jak určit odporový součinitel?

- Newton (1685) řešil následující problém: nalezněte těleso s minimálním odporem vzduchu.
- Co to je minimální odpor vzduchu?
- Předpoklady: řídká tekutina, elastická srážka, zákon zachování hybnosti
- Příklady: $C = \frac{1}{2}$ pro kouli, $C = 1$ pro plochou desku
- Jak asi vypadá optimální tvar?

Model



Aplikace




Matematická formulace problému (osová symetrie)

Hledáme funkci w tak, aby

- $w(0) \geq 0$, $w(M) = R$, $w' \geq 0$ na $(0, M)$
- $C = \int_0^M \frac{w(t)w'(t)^3}{1+w'(t)^2} dt + \frac{w(0)^2}{2}$ byl minimální

Matematická formulace problému (osová symetrie)

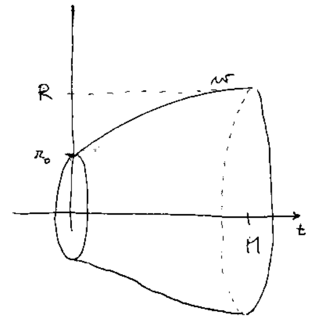
Hledáme funkci w tak, aby

- $w(0) \geq 0$, $w(M) = R$, $w' \geq 0$ na $(0, M)$
- $C = \int_0^M \frac{w(t)w'(t)^3}{1+w'(t)^2} dt + \frac{w(0)^2}{2}$ byl minimální
- Problém lze převést na řešení diferenciální rovnice na $(0, M)$

$$w(t)\frac{w'(t)^3}{(1+w'(t)^2)^2} = \frac{c}{2}$$

pro vhodné $c > 0$.

Funkce w



Osově symetrická řešení

Řešení lze nalézt v parametrickém tvaru:

- $t(z) = \frac{c}{2}\left(\frac{1}{z^2} + \lg z + \frac{3}{4z^4} + A\right)$,
- $w(z) = \frac{c}{2}\frac{(1+z^2)^2}{z^3}$.

Konstanty c a A jsou určeny požadavky $t(1) = 0$, $w(M) = R$.

Obrázek 2.1: Optimální řešení radiálně symetrického Newtonova problému pro $M = \frac{R}{2}$, $M = R$ a $M = 2R$.

Nesymetrická řešení

Pokud vynecháme předpoklad osové symetrie, budeme řešit následující problém. Buď K kruh o poloměru R. Najděme $w : K \to [0, M]$ tak, že

- w je konkávní
- $\int_K \frac{1}{1+|\nabla w(x)|^2} dx$ je minimální

Je optimální řešení osově symetrické?

Nesymetrická řešení

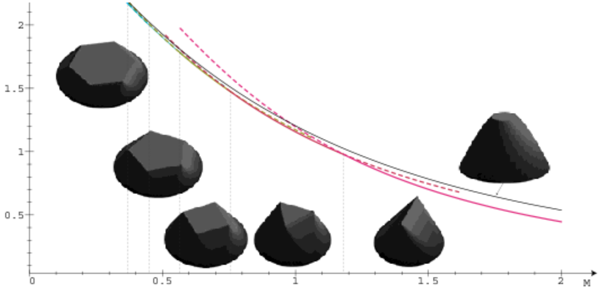
Pokud vynecháme předpoklad osové symetrie, budeme řešit následující problém. Buď K kruh o poloměru R. Najděme $w : K \to [0, M]$ tak, že

- w je konkávní
- $\int_K \frac{1}{1+|\nabla w(x)|^2} dx$ je minimální

Je optimální řešení osově symetrické?

Brock, Ferone, Kawohl (1996)-řešení není nikdy osově symetrické

Lachand-Robert, Peletier (2001)-explicitní tvar řešení



Závěr

- Pomocí Newtonových zákonů jsme modelovali pád v prostředí (s odporem).

Závěr

- Pomocí Newtonových zákonů jsme modelovali pád v prostředí (s odporem).
- Našli jsme optimální aerodynamický profil.

Závěr

- Pomocí Newtonových zákonů jsme modelovali pád v prostředí (s odporem).
- Našli jsme optimální aerodynamický profil.
- Zjistili jsme, že některá "zřejmá" fakta nejsou pravdivá.

Závěr

- Pomocí Newtonových zákonů jsme modelovali pád v prostředí (s odporem).
- Našli jsme optimální aerodynamický profil.
- Zjistili jsme, že některá "zřejmá" fakta nejsou pravdivá.
- I v klasických matematických problémech je možné dosáhnout nových výsledků.

Závěr

- Pomocí Newtonových zákonů jsme modelovali pád v prostředí (s odporem).
- Našli jsme optimální aerodynamický profil.
- Zjistili jsme, že některá “zřejmá” fakta nejsou pravdivá.
- I v klasických matematických problémech je možné dosáhnout nových výsledků.
- Diferenciální rovnice jsou kolem nás (na MFF UK).

Závěr

- Pomocí Newtonových zákonů jsme modelovali pád v prostředí (s odporem).
- Našli jsme optimální aerodynamický profil.
- Zjistili jsme, že některá "zřejmá" fakta nejsou pravdivá.
- I v klasických matematických problémech je možné dosáhnout nových výsledků.
- Diferenciální rovnice jsou kolem nás (na MFF UK).

Děkuji Vám za pozornost.