Konvexní optimalizace

Cvičení 14

Problém 1 (Metody fáze I)**.** Máme problém (P)

$$
\begin{aligned}
\text{minimalizujte}\ & f_0(x)\\
\text{za podmínek}\ & f_1(x) \le 0\\
& \vdots\\
& f_m(x) \le 0.
\end{aligned}
$$

Uvažte problém (F)

$$
\begin{aligned}
\text{minimalizujte}\ & s\\
\text{za podmínek}\ & f_1(x) \le s\\
& \vdots\\
& f_m(x) \le s.
\end{aligned}
$$

Předpokládejme, že definiční obor f_0 je celý prostor $\mathbb{R}^n$. Dokažte, že (P) má striktně přípustné řešení, právě když (F) má zápornou optimální hodnotu. Jak byste ve výpočetní praxi řešili situaci, kdy $s^\star = 0$?

Problém 2 (zobecněný logaritmus)**.** Abychom mohli použít bariérovou metodu pro kuželové programy, potřebujeme *zobecněný logaritmus*. Buď $K \subset \mathbb{R}^q$ vlastní kužel. Řekneme, že $\psi\colon \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}$ je zobecněný logarimus pro K, pokud

1. $\operatorname{dom}\psi$ je roven vnitřku K,
2. ψ má spojité všechny druhé derivace a $\nabla^2\psi(x) \prec 0$ pro všechna $x \in \operatorname{dom}\psi$,
3. všechny podúrovňové množiny ψ jsou uzavřené podmnožiny $\mathbb{R}^q$ (tady si dejte pozor na hranici $\operatorname{dom} f$),
4. existuje $\theta > 0$, že pro všechna $\mathbf{y} \succ_K \mathbf{0}$ a všechna $s > 0$ je
$$\psi(s\mathbf{y}) = \psi(y) + \theta \log s.$$

Ověřte, že následující funkce jsou zobecněné logaritmy (nebo aspoň ověřte tolik podmínek, kolik zvládnete):

(a) $\log x$ pro $\mathbb{R}_+$ $(q = 1)$

(b) $\log(x_{n+1}^2 - \sum_{i=1}^n x_i^2)$ pro $K = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \colon \|(x_1,\dots,x_n)\|_2 \le x_{n+1}\}$

(c) $\log\det X$ (zúžená na S_{++}^n) pro $K = S_+^n$

Problém 3. Mějme ψ zobecněný logaritmus pro kužel K. Jak byste řešili bariérovou metodou následující problém (kde f_0 je konvexní, hladká atd.)?

$$\begin{aligned} &\text{minimalizujte } f_0(\mathbf{x}) \\ &\text{za podmínky } \mathbf{x} \preceq_K 0 \end{aligned}$$

Problém 4 (samo-konkordované funkce)**.** Důkazy rychlé konvergence výpočetních metod fungují velmi pěkně pro tzv. samo-konkordované (self-concordant) funkce. Jednorozměrná $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je samo-konkordovaná, pokud je konvexní a pro všechna $x \in \operatorname{dom} f$ platí

$$|f'''(x)| \leq 2|f''(x)|^{3/2}.$$

(a) Dokažte, že pokud je $f(x)$ samo-konkordovaná a $a, b \in \mathbb{R}$ jsou konstanty, tak je samo-konkordovaná i $g(y) = f(ax + b)$.

(b) Dokažte, že $-\ln(-x)$ je samo-konkordovaná.

(c) Dokažte, že x^2 je samo-konkordovaná.

(d) Dokažte, že $\exp(x)$ není samo-konkordovaná.