Cvičení 3

Problém 1. Je funkce $f(x, y) = xy$ konvexní? Je konkávní?

Problém 2. Dokažte, že každá norma je konvexní funkce.

Problém 3. Buď $f(\mathbf{x}) = \max\{\mathbf{c}_1^T\mathbf{x} + b_1, \dots, \mathbf{c}_k^T\mathbf{x} + b_k\}$ konvexní po částech afinní funkce a A matice takové velikosti, že výraz $A\mathbf{x}$ dává smysl.

Vymyslete, jak přepsat problém “minimalizujte $f(\mathbf{x})$ za podmínek $A\mathbf{x} \preceq 0$” jako problém lineárního programování.

Problém 4. Dokažte, že pokud je P konvexní program a $\mathbf{x}$ je lokálně optimální řešení P, tak je $\mathbf{x}$ také (globálně) optimální řešení P.

Problém 5. Buď P konvexní program, X_{opt} množina optimálních řešení P. Dokažte, že X_{opt} je konvexní množina.

Problém 6. Dokažte pomocí Jensenovy nerovnosti nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem: Pro každou volbu $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}_{++}$ platí

$$(x_1 \cdot x_2 \cdots x_n)^{1/n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$