Konvexní optimalizace

Cvičení 5

Problém 1. Buďte $K \subset \mathbb{R}^n$, $L \subset \mathbb{R}^m$ vlastní kužele. Dokažte, že

$$K \times L = \{(x_1, \dots, x_{n+m}) \in \mathbb{R}^{n+m} \colon (x_1, \dots, x_n) \in K(x_1, \dots, x_m) \in L\} \subset \mathbb{R}^{n+m}.$$

je také vlastní kužel.

Problém 2. Zvolte vhodný vlastní kužel $K \subseteq \mathbb{R}^6$, vektor $\mathbf{c}$, $\mathbf{g}$ a matici F tak, aby problém kuželového programování řádu dva:

$$\begin{aligned} \text{minimalizujte } & t \\ \text{za podmínek } & \|(x_1, 2x_2 + 2)\|_2 - t \leq 0 \\ & \|(1, x_2)\|_2 - x_1 - 1 \leq 0 \end{aligned}$$

byl ekvivalentní kuželovému problému

$$\begin{aligned} \text{minimalizujte } & \mathbf{c}^T \mathbf{y} \\ \text{za podmínek } & F\mathbf{y} + \mathbf{g} \preceq_K 0. \end{aligned}$$

Problém 3. Načrtněte v $\mathbb{R}^2$ nekonvexní množinu M, která obsahuje nějaký $\preceq$-minimální (vůči $\mathbb{R}^2_+$) bod $\mathbf{x}$ takový, že pro každé $\lambda \succeq \mathbf{0}$ obsahuje M nějaký bod $\mathbf{y}$ splňující $\lambda^T \mathbf{y} < \lambda^T \mathbf{x}$.

Problém 4. Přepište problém kuželového programovaní ze standardního tvaru

$$\begin{aligned} \text{minimalizujte } & \mathbf{c}^T \mathbf{y} \\ \text{za podmínek } & A\mathbf{y} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{y} \succeq_K 0 \end{aligned}$$

na ekvivalentní problém z definice kuželového programu:

$$\begin{aligned} \text{minimalizujte } & \mathbf{c}'^T \mathbf{x} \\ \text{za podmínek } & F\mathbf{x} + \mathbf{g} \preceq_{K'} 0 \\ & A'\mathbf{x} = \mathbf{b}'. \end{aligned}$$

Rada: Není to těžké.

Problém 5. Vymyslete, jak převést problém lineárního programování z tvaru s nerovnostmi (vůči kuželu $\mathbb{R}^m_+$)

$$\begin{aligned} \text{minimalizujte } & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{za podmínek } & F\mathbf{x} + \mathbf{g} \preceq 0 \end{aligned}$$

na ekvivalentní LP ve standardním tvaru (pro vektor proměnných $\mathbf{y}$)

$$\begin{aligned} \text{minimalizujte } & \mathbf{d}^T \mathbf{y} \\ \text{za podmínek } & A\mathbf{y} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{y} \succeq 0. \end{aligned}$$