Konvexní optimalizace

Cvičení 6

Problém 1 (Duál k „duálu“ pro LP)**.** Zformulujte co nejhezčí LP ekvivalentní duálnímu problému k:

$$\begin{aligned} \text{minimalizujte } & \mathbf{b}^T \nu \\ \text{za podmínek } & A\nu \succeq -\mathbf{c} \end{aligned}$$

Zde $\nu \in \mathbb{R}^p$ jsou proměnné.

Problém 2. Mějme problém (P)

$$\begin{aligned} \text{minimalizujte } & x + y + z \\ \text{za podmínek } & x + 4y + 2z = 1 \\ & x \geq 0 \\ & y \geq 0 \\ & z \geq 0. \end{aligned}$$

a) Zformulujte duální problém k (P) (nebo problém k duálnímu ekvivalentní), najděte jeho optimum

b) Zformulujte co nejlepší odhad na optimální hodnotu (P) „středoškolsky“ pomocí chytrého kombinování rovnosti $x+4y+2z = 1$ a nerovností $x, y, z \geq 0$.

c) Porovnejte odhady optima (P), které vám daly obě metody.

Problém 3. Pro LP platí věta o silné dualitě: Buď (P) problém ve tvaru LP a buď (D) duální k (P). Pokud existuje aspoň jedno přípustné řešení (P) nebo (D), tak $p^\star = d^\star \in \mathbb{R}$.

S použitím této věty dokažte Farkašovo lemma o nerovnostech: Buď A matice $p \times n$ a $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^p$. Potom platí právě jedno z následujících dvou tvrzení:

a) $\exists \mathbf{x} \succeq \mathbf{0}$, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

b) $\exists \mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$, $A^T\mathbf{y} \succeq \mathbf{0}$, $\mathbf{b}^T\mathbf{y} < 0$.

Rada: Jedna implikace je okamžitá, na druhou potřebujete vymyslet vhodný LP a použít dualitu.

Problém 4. Uvažme optimalizační problém (P)

$$\begin{aligned} \text{minimalizujte } & e^{-x} \\ \text{za podmínek } & x^2/y \leq 0, \end{aligned}$$

kde definiční obor x^2/y položíme rovný $\mathcal{D} = \{(x, y) \colon y > 0\}$.

1. Najděte optimální řešení (P).
2. Zformulujte duál (D) k (P).
3. Najděte optimální řešení (D) a přesvěčte se, že $d^\star < p^\star$.
4. Jak se změní dualitní mezera, pokud podmínku $x^2/y \leq 0$ nahradíme slabší verzí $x^2/y \leq 1/1000$?