

Cvičení 8

Problém 1. Vyřešte problém „Najděte minimum funkce $x+2y+3z$ na množině $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \|(x, y, z)\|_2 \leq 1\}$ “ pomocí hledání řešení KKT podmínek. Kde jste použili komplementaritu? Jak se váš postup podobá a liší od toho, co jste se naučili v Analýze I?

Problém 2. Dokažte, že funkce $p^*(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ z přednášky je konvexní. Můžete předpokládat, že problém $P(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ je konvexní.

Problém 3. Buď X systém složený z mnoha jednoduchých součástí (molekul, lidí, ...). Tyto součásti se nachází ve stavech a_1, \dots, a_n a různě (a složitě) mezi těmito stavy přecházejí. Označme p_i zlomek součástí systému, které jsou ve stavu a_i ; čísla p_i se chovají jako pravděpodobnosti: Máme $p_1 + \dots + p_n = 1$ a $p_i \geq 0$ pro všechna i . Entropie systému S je daná funkcí

$$S(p_1, \dots, p_n) = - \sum_{i=1}^n p_i \ln p_i,$$

kde za definiční obor berme \mathbb{R}_{++}^n .

Ve fyzice i jinde nás často zajímá, kdy má systém maximální entropii za předpokladu, že o systému známe nějaké makroskopické informace (teplotu, energii, hybnost a podobně). Maximální entropie odpovídá stavu, který je pro dané hodnoty makroskopických stavů nejméně uspořádaný a „nejčastější“.

- Dokažte, že S je konkávní funkce.
- Řekněme, že lidé v populaci mohou být v 99 možných stavech a_1, \dots, a_{99} , které popisují měsíční příjem: Člověk ve stavu a_i vydělá za měsíc i tisíc Kč hrubého. Najděte vzoreček pro rozdělení příjmů v populaci (tj. čísla $p_1 \dots p_{99}$), která maximalizují entropii rozdělení příjmů, víme-li, že průměrný výdělek za měsíc je 29 tisíc hrubého.

Rada: Podívejte se na duální problém, použijte silnou dualitu a KKT podmínky.

Problém 4. Prodáváme barvy. Máme 100 hektolitrů azurové, 50 hektolitrů purpurové a neomezeně žluté barvy. Bohužel zákazníci chtějí červenou (za cenu 10 Kč/l), zelenou (15 Kč/l), modrou (25 Kč/l).

Můžeme míchat barvy takto:

- 1 jednotka žluté a 1 jednotka purpurové nám dá 2 jednotky červené,
- 1 jednotka žluté a 1 jednotka azurové nám dá 2 jednotky zelené,
- 1 jednotka purpurové a 1 jednotka azurové nám dá 2 jednotky modré,

Krom prodávání barev můžeme v malých množstvích (řekněme nejvýše 1 hektolitr) i nakupovat azurovou, purpurovou a žlutou. Kolik nejvíce bychom měli (aby se nám to vyplatilo) zaplatit za litr azurové? A co za litr purpurové?