

Sada 1 domácích úkolů

Termín odevzdání: 18. října 2018 ve 12:21

Všechna svá řešení zdůvodněte.

Problém	Bodů max	Bodů
1	2	
2	2	
3	2	
4	2	
5	2	
Σ	10	

Problém 1. Načrtněte konvexní množinu danou soustavou rovnic pro proměnné x_1, x_2 :

$$\begin{aligned}x_1 &\geq 0 \\x_1 + x_2 &\leq 4 \\x_1 - x_2 &\geq -1\end{aligned}$$

Problém 2. Dokažte, že pro každé $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ leží matice $\mathbf{a}\mathbf{a}^T$ (pořadí transpozice není překlep) v S_+^n .

Problém 3. Jsou následující množiny konvexní? A pokud ano, jsou to konvexní kužele? A pokud ano, jsou to vlastní kužele? Své rozhodnutí zdůvodněte.

a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$

b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \exists z \geq 0 \text{ takové, že platí } x > z, y > z\}$

c) $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \text{vzdálenost bodu } \mathbf{x} \text{ od počátku je nejvýše rovná vzdálenosti bodu } \mathbf{x} \text{ od bodu } (2, -1, 7)\}$

d) $\left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} : \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \geq 1 \right\}$

Problém 4. Dokažte, že pokud $A, B \subset \mathbb{R}^n$ jsou konvexní množiny, tak také následující množiny jsou konvexní:

1. $2A = \{c \in \mathbb{R}^n : \exists a \in A, c = 2a\}$

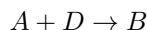
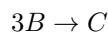
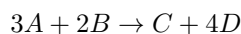
2. $-A = \{c \in \mathbb{R}^n : -c \in A\}$

3. $A + B = \{c \in \mathbb{R}^n : \exists a \in A, \exists b \in B, a + b = c\}$

Problém 5. Zformulujte jako konvexní (nejlépe lineární) optimalizační problém (tj. ve formě “minimalizujte $f(x)$ za podmínek ...”) následující úlohu:

Máte chemickou továrnu, kde se pracuje se čtyřmi typy látek A , B , C a D . Momentálně nemáte na skladě žádnou z látek, ale můžete nakupovat: Kilogram látky A stojí 3 Kč, kilogram látky B stojí 10 Kč a kilogram látky C stojí 100 Kč. Látka D je nebezpečný odpad, který se nedá nakupovat, ale musíte se ho zbavovat za cenu 1 Kč za uložený kilogram.

V továrně můžete provozovat následující tři typy reakcí (kde čísla jsou poměry váhy reaktantů a produktů, tj. $3A + 2B \rightarrow C + 4D$ značí, že můžete použít například 3 kg látky A a 2 kg látky B k výrobě 1 kg látky C a 4 kg látky D):



Zákazník si objednal 1 tunu látky A , 4 tuny látky B a 3 tuny látky C . Jak zákazníkovi tyto látky dodat s co nejmenšími náklady (včetně ceny za zneškodnění odpadu D)? Vaše formulace nemusí popisovat realitu dokonale (řekněme si rovnou, že zadání má jeden háček), ale měla by být dostatečně dobrá, aby byla užitečná.

K zisku plného počtu bodů je nezbytné, abyste (klidně stručně) vysvětlili, co která proměnná/podmínka ve Vašem optimalizačním problému dělá a jak souvisí s původní úlohou.

Při řešení úloh je možné se poradit s dalšími lidmi (nejlépe dalšími studenty Konvexní optimalizace), ale svá řešení (včetně programů!) *pište samostatně* a před termínem odevzdání úloh sepsaná řešení (a programy) nikomu *neukazujte*.