Jméno:

Konvexní optimalizace

Sada 8 domácích úkolů

Termín odevzdání: 6. prosince 2018 ve 12:21

Všechna svá řešení zdůvodněte.

Problém	Bodů max	Bodů
1	2	
2	2	
3	3	
4	3	
Σ	10	

Problém 1 (Detaily řešení problému 2.2 ze 7. cvičení)**.** Našim cílem bude ukázat, že pokud $K \subset \mathbb{R}^n$ je *uzavřený* kužel, tak $K^{\star\star} = K$. K tomu potřebujeme, aby pro každý vektor $\mathbf{w} \notin K$ existoval $\mathbf{v} \in K^\star$ takový, že $\mathbf{v}^T\mathbf{w} < 0$.

Dokažte:

1. Pokud $\mathbf{w} \notin K$, tak existují $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ a $b \in \mathbb{R}$ takové, že $\mathbf{v}^T\mathbf{w} < b$ a pro všechny $\mathbf{u} \in K$ platí $\mathbf{v}^T\mathbf{u} \geq b$ Rada: Použijte větu o oddělující nadrovině a bod $\mathbf{w}$ „nafoukněte“.

2. Dokažte, že b v předchozím bodě lze volit rovné 0.

3. Ověřte, že pak vektor $\mathbf{v}$ leží v $K^\star$.

Problém 2. Uvažte lineární program

$$\begin{array}{rr} \text{minimalizujte} & -x_1 \\ \text{za podmínek} & x_1 - 2x_2 \leq 12 \\ & x_1 + x_2 \leq 36 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Optimální hodnota tohoto programu je $\mathbf{x}^\star = (28, 8)$. Řekněme, že účelovou funkci změníme na $-x_1 - tx_2$, kde t je nějaká konstanta. Pro které hodnoty t zůstane $(28, 8)$ optimálním řešením?

Problém 3 (Inspirováno hrou Aréna. Altar, 1997)**.** Simulujeme šerm takto: Máme dva hráče, kteří si oba vyberou jedno z čísel 1, 2, nebo 3, které symbolizují druh útoku/obrany. Pokud je číslo hráče 1 (útočníka) rovno číslu hráče 2 (obránce), tak obránce útok odrazil a oba hráči získají 0 bodů. Pokud jsou čísla různá, tak hráč 1 získá a hráč 2 ztratí tolik bodů, kolik činila hodnota vybraná hráčem 1.

Určete pomocí počítače strategii optimální v nejhorším případě pro hráče 1 a totéž pro hráče 2. Určete také hodnotu této hry (tj. očekávaný zisk bodů hráče 1, pokud oba hráči hrají podle strategie optimální v nejhorším případě). Svůj program mi nemusíte posílat, ale okomentujte, jak jste jej vytvořili.

Problém 4. Čert jde na mikuláškou koledu. Má batoh, kam se vejde 10 kg vybavení, a chce si s sebou vzít věci, co dávají co největší součet užitečnosti.

Od každé věci si může vzít buď nula nebo jeden kus, což bohužel není konvexní podmínka. Vyřešte proto problém batohu jako lineární program za předpokladu, že je možné vzít si s sebou danou věc částečně (tj. třeba 60 % trojzubce má 60 % váhy i užitečnosti) a porovnejte optimum lineárního programu s nejlepším řešením původního problému (kde nelze brát zlomky věcí), které Vás napadne.

Pro řešení lineárního programu použijte počítač, ale Váš program mi nemusíte posílat (řešení LP by mělo už být rutinní záležitost) – stačí zformulovat úlohu (se zdůvodněním) a zapsat optimální řešení (z LP a „selského rozumu") sem na papír.

Tabulka užitečnosti a váhy různých věcí:

Věc	Váha (kg)	Užitečnost
Rum (pro Mikuláše)	0,2	1
Svítící rohy	0,6	2
Rum (pro sebe)	1,5	4
Čokoládu (pro anděla)	2,55	6
Studijní a zkušební řád	2,65	6
Brambory	3,15	7
Řetěz	3,2	7
Příruční pytel uhlí	3,35	8
Rachejtle	3,55	8
Trojzubec	3,95	9
Skateboard	4,1	9
Černý kocour (zlý)	4,3	10
Velký pytel uhlí	4,55	10