Cvičení 23. 2. 2012

Buď R okruh, I, J jeho oboustranné ideály takové, že $I + J = R$. Potom zobecněná čínská zbytková věta tvrdí, že

$$R/I \cap J \simeq R/I \times R/J$$

pomocí isomorfismu $r+I \cap J \mapsto (r+I, r+J)$ (zobecněnou ČZV lze dále zobecnit na více ideálů). Zde součin okruhů je okruh, kde jsou operace definované po složkách.

Značení: Pokud R je komutativní okruh (to bude skoro pořád), $r \in R$, tak ideál generovaný r budeme značit (r) nebo rR. Je to množina $\{rs : s \in R\}$. Zápis $I + J$ značí ideál $\{i + j : i \in I, j \in J\}$.

Příklad 1. Dokažte, že oboustranný ideál I okruhu R je roven R právě když $1 \in I$.

Příklad 2. Dokažte, že v celých číslech platí pro ideály generované m, n rovnosti $(m) + (n) = (nsd(m, n))$ a $(m) \cap (n) = (nsn(m, n))$.

Příklad 3. Buďte $a, b \in \mathbb{Z}$ dvě nesoudělná celá čísla. Dokažte, že pak existují celá čísla c, d, že $ac + bd = 1$.

Příklad 4. Napište následující okruhy jako součin známých okruhů:

1. $\mathbb{R}[x]/(x-1)\mathbb{R}[x]$
2. $\mathbb{R}[x]/(x^2+2x-3)\mathbb{R}[x]$
3. $\mathbb{R}[x]/(x^3-2x^2+x)\mathbb{R}[x]$

Příklad 5. Běžně známá čínská zbytková věta tvrdí, že pokud $n_1, \ldots, n_k$ jsou po dvou nesoudělná čísla, tak má pro každá $m_1, \ldots, m_k$ soustava

$$\begin{aligned} x &\equiv m_1 \pmod{n_1} \\ x &\equiv m_2 \pmod{n_2} \\ &\vdots \\ x &\equiv m_k \pmod{n_k} \end{aligned}$$

právě jedno řešení v množině $\{1, \ldots, n_1 \cdots n_k\}$. Dokažte, že toto tvrzení plyne ze zobecněné ČZV.

Příklad 6. Najděte číslo $x \in \{1, \ldots, 273\}$ takové, aby dávalo po dělení 3 zbytek 1, po dělení 7 zbytek 2 a po dělení 13 zbytek 4.

Příklad 7. Dokažte zobecněnou ČZV.

Příklad 8. Zobecněte zobecněnou ČZV na více ideálů: Pokud R je okruh a $I_1, \ldots, I_k$ (oboustranné) ideály takové, že $I_i + I_j = R$ kdykoli $i \neq j$, tak

$$R/\bigcap_{j=1}^{k} I_j = \prod_{j=1}^{k} R/I_j$$

Rada: Začněte tím, že dokážete, že $I+J = R, I+J' = R$ implikuje $I+J \cap J' = R$.