Cvičení 3. 5. 2012

Těleso T je algebraicky uzavřené, pokud k němu nelze přidat žádný nový algebraický prvek, čili každý polynom $p \in T[x]$ stupně aspoň 1 má aspoň jeden kořen. Takové těleso se dá vyrobit tak, že ke každému polynomu přidáváme kořeny, dokud to jde.

Pokud T je těleso, $p \in T[x]$ polynom stupně aspoň 1, tak kořenové nadtěleso K je každé těleso $T(\alpha)$, kde α je kořen p. Rozkladové nadtěleso p nad T je každé těleso $T(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, že se p rozkládá v součin lineárních členů:

$$p(x) = a(x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_n).$$

Věta 1. Polynom $f \in T[x]$ stupně aspoň 1 má až na T-isomorfismus jediné rozkladové nadtěleso $T \leq K$.

(Co je T-isomorfismus? Tělesový isomorfismus, který je identita na T.)

Příklad 1. V $\mathbb{Q}[x]$ najděte všechna rozkladového nadtělesa F daných polynomů, určete $[F : \mathbb{Q}]$:

1. $x^2 - 1$
2. $x^2 + 1$
3. $x^3 - 2$
4. $x^3 - 3x + 5$

Příklad 2. Určete počet prvků rozkladového nadtělesa $2x^4 + 1$ nad $\mathbb{Z}_3$.

Příklad 3. Zkonstruujte konečné těleso o 8 prvcích jako rozšíření tělesa $\mathbb{Z}_2$.

Příklad 4. Popište všechny $\mathbb{Q}$-automorfismy tělesa $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5})$.

Příklad 5. Buď p polynom nad $\mathbb{Q}$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ jeho po dvou různé kořeny. Dokažte, že každý $\mathbb{Q}$-automorfismus $\mathbb{Q}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ je permutace na množině $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$.