Cvičení 24. 5. 2012

Co jest svaz: Částečně uspořádaná množina, kde navíc pro každou dvojici a, b existuje supremum i infimum.

Kde svazy najdeme: V algebře jako svazy podgrup, svazy normálních podgrup, svazy ideálů, svazy rovnicových teorií, občas svazy vyskočí i v kombinatorice...

Jiný pohled na svazy (na přednášce se podrobně ukazuje, že je ekvivalentní): Supremum a infimum jsou binární operace, budeme je značit $a \wedge b = \inf(a, b)$ a $a \vee b = \sup(a, b)$, a všimneme si, že $\wedge, \vee$ jsou komutativní a asociativní, dále jsou idempotentní $a \wedge a = a = a \vee a$ a konečně funguje *absorpce*:

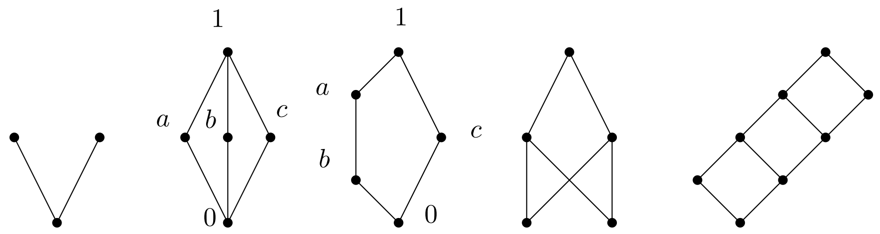
$$a \wedge (a \vee c) = a = a \vee (a \wedge c).$$

To jsou přesně axiomy pro to, aby $(X, \wedge, \vee)$ byl svaz. Svazové uspořádání potom definujeme jako $a \leq b \Leftrightarrow a \wedge b = a$.

Pokud $(X, \wedge, \vee)$ je svaz a $Y \subset X$ je uzavřená na $\wedge, \vee$, tak $(Y, \wedge, \vee)$ je podsvaz.

Příklad 1. *Rozhodněte, zda je svaz, a popište operace $\wedge, \vee$:*

1. $(\mathbb{R}, \leq)$
2. *Množina všech podmnožin $\{1, \dots, n\}$ uspořádaná inkluzí.*
3. $(\mathbb{N}, |)$ *(dělitenost)*
4. *Množina všech ideálů okruhu R uspořádaná inkluzí.*
5. *Hasseovy diagramy z obrázku*



M_3 N_5

Příklad 2. *Najděte svazově uspořádanou množinu $(X, \leq)$ a její podmnožinu Y takovou, že $(Y, \leq)$ není svazově uspořádaná (tj. Y není podsvaz X).*

Příklad 3. *Nakreslete svaz normálních podgrup grupy* $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ *(uspořádání je inkluze).*

Příklad 4. *Nakreslete všechny neisomorfní svazy s nejvýše pěti prvky.*

Příklad 5. *Svaz se nazývá distributivní, pokud pro každé* x, y, z *platí*

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$

Dokažte, že pokud svaz X *obsahuje jako podsvaz* N_5 *nebo* M_3*, pak* X *není distributivní (opět to platí i naopak – viz přednáška).*

Příklad 6. *Rozhodněte, zda implikace* $x \wedge y = x \wedge z \Rightarrow x \wedge (y \vee z) = x \wedge y$ *platí pro všechna* x, y, z*:*

1. *v distributivních svazech*
2. *ve všech svazech.*

Příklad 7. *Rozhodněte, zda je svaz distributivní:*

1. *Množina všech podmnožin* $\{1, \ldots, n\}$ *uspořádaná inkluzí.*
2. *Množina všech ideálů okruhu* R *uspořádaná inkluzí.*
3. *Množina všech podgrup grupy* G *uspořádaná inkluzí.*