Cvičení 22. 3. 2012

Okruh je noetherovský, pokud v něm neexistuje ostře rostoucí řetězec ideálů, tj posloupnost ideálů $I_1 \subsetneq I_2 \subsetneq I_3 \subsetneq \dots$. Ekvivalentně to znamená, že každý ideál je konečně generovaný.

Většina okruhů „ze života" (tělesa, $\mathbb{Z}$, polynomy konečně mnoha neurčitých a jejich faktorokruhy) je noetherovská, ale existují protipříklady.

Příklad 1. Buď R komutativní okruh, $I_1 \subseteq I_2 \subseteq I_3 \subseteq \dots$ řetězec ideálů, že $\bigcup_{i=1}^{\infty} I_i = R$. Dokažte, že od nějakého i_0 dále jsou všechny ideály I_i stejné.

Příklad 2. Dokažte, že okruhy $\mathbb{R}[x_1, x_2, x_3, \dots]$ a $\mathbb{Z} + \mathbb{Q}[x]x$ nejsou noetherovské.

Příklad 3. Dokažte, že každý okruh $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ je noetherovský.